

تمارين و مسائل محلولة

الجزء 1

- النهايات والاستمرارية
- الاشتقاق
- الدوال الأصلية
- الدوال الأسية
- الدوال اللوغاريتمية
- المتتاليات العددية
- الحساب التكاملي

سلسلة مدرستي

Hard\_equation

# الرياضيات

## 3AS

السنة الثالثة من التعليم الثانوي

شعبة العلوم التجريبية

- مراجعة الدروس
- تمارين بحلول مفصلة
- مواضيع نموذجية لامتحان
- البكالوريا مع حلولها

منشورات الشهاب



# تمارين و مسائل محلولة في الرياضيات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي  
شعبة العلوم التجريبية

الطبعة الثانية منقحة

رابح بناني  
مفتش التربية و التكوين

وحسن أوديع  
مفتش التربية و التكوين

العربي داود  
مفتش التربية و التعليم الأساسي

## الجزء 1

- النهايات و الاستمرارية
- الاشتقاق
- الدوال الأصلية
- الدوال الأسية
- الدوال اللوغاريتمية
- المتتاليات العددية
- الحساب التكاملي

منشورات الشهاب

© منشورات الشهاب، 2007

الحجم : 18,5 x 27 - عدد الصفحات : 160

ردمك : 9 - 588 - 63 - 9961

الإيداع القانوني : 2007 - 2419

منشورات الشهاب : 10، نهج إبراهيم عرفاء، باب الواد، الجزائر 16009

site internet : [www.chihab.com](http://www.chihab.com) - E-mail : [chihab@chihab.com](mailto:chihab@chihab.com)

أنجز طبعه على مطابع عمار فرقي - باتنة



## مقدمة

هذا الكتاب في الرياضيات موجه إلى تلاميذ السنة الثالثة من التعليم الثانوي الذين يدرسون بصقة خاصة في شعبة العلوم التجريبية، كما يمكن لتلاميذ الشعب العلمية و التكنولوجيا الأخرى استغلاله.

إن مضامينه مطابقة للمنهاج الرسمي الذي شرع في تطبيقه ابتداء من سبتمبر 2007 و المنجز في إطار إصلاح المنظومة التربوية، و هو يغطي في جزئه الأول مضامين التعلم المتعلقة بميدان التحليل. يعتبر هذا الكتاب وسيلة تعليمية يسمح استعمالها بتمديد العمل المنجز في القسم و بتدعيم المكتسبات و التدريب على العمل الفردي.

يندرج هذا الإصدار في تصور خاص و مميز للتعلم، فهو يهدف إلى إعطاء الفرصة للتلميذ لممارسة و تعلم البرهنة و تحرير حلول بصقة سليمة، و هذا ما يحضره لمختلف عمليات التقويم خلال السنة الدراسية و خاصة الاستعداد الجيد لامتحان شهادة البكالوريا.

يتركب هذا الجزء من 7 أبواب، يشمل كل باب الأجزاء التالية :

- معارف متمثلة في تعاريف ومبرهنات ونتائج وخواص وملاحظات، مصاغة بصقة دقيقة وموجزة.
- طرائق مطبقة في وضعيات وجيهة، مرفقة بحلول محررة بتعبير رياضي سليم، يدركه التلميذ و يستعمله في وضعيات مماثلة.
- تمارين بحلول نموذجية توظف معارف و طرائق مدروسة، تبين فعاليتها.
- تعتبر هذه التمارين نماذج يمكن التمرن عليها كثيرا من التحكم في المفاهيم و الطرائق، و تذليل الصعوبات التي تتضمنها.
- تمارين و مسائل مقترحة للحل، يتدرب عليها التلميذ. و تسمح مواجهة هذه الوضعيات بتشخيص الصعوبات العنيدة و معالجتها في الوقت المناسب.
- أدرجت في الجزء الأخير من هذا الكتاب حلول موجزة للتمارين و المسائل المقترحة في نهاية كل باب، يطلع عليها التلميذ بعد إنجاز محاولاته قصد مقارنة حله و التحقق من صحته ثم تعديل و تصحيح أخطائه. إن هذا العمل يسمح له بتحسين مردوده و التحكم في الكفاءات القاعدية و الكفاءات الرياضية المصرح بها في المنهاج.

## فهرس الجزء الأول

| الصفحة                          | المحتويات                                                                                                                | المجال                     |
|---------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|
| 5<br>8<br>14<br>17<br>135       | معارف .....<br>طرائق .....<br>تمارين و حلول نموذجية .....<br>تمارين و مسائل مقترحة .....<br>حلول التمارين المقترحة ..... | 1 - النهايات و الإستمرارية |
| 19<br>23<br>34<br>37<br>138     | معارف .....<br>طرائق .....<br>تمارين و حلول نموذجية .....<br>تمارين و مسائل مقترحة .....<br>حلول التمارين المقترحة ..... | 2 - الإشتقاق               |
| 40<br>42<br>46<br>48<br>141     | معارف .....<br>طرائق .....<br>تمارين و حلول نموذجية .....<br>تمارين و مسائل مقترحة .....<br>حلول التمارين المقترحة ..... | 3 - الدوال الأصلية         |
| 50<br>52<br>59<br>61<br>142     | معارف .....<br>طرائق .....<br>تمارين و حلول نموذجية .....<br>تمارين و مسائل مقترحة .....<br>حلول التمارين المقترحة ..... | 4 - الدوال الأسية          |
| 64<br>69<br>80<br>83<br>145     | معارف .....<br>طرائق .....<br>تمارين و حلول نموذجية .....<br>تمارين و مسائل مقترحة .....<br>حلول التمارين المقترحة ..... | 5 - الدوال اللوغاريتمية    |
| 86<br>92<br>100<br>102<br>150   | معارف .....<br>طرائق .....<br>تمارين و حلول نموذجية .....<br>تمارين و مسائل مقترحة .....<br>حلول التمارين المقترحة ..... | 6 - المتتاليات             |
| 105<br>110<br>120<br>131<br>156 | معارف .....<br>طرائق .....<br>تمارين و حلول نموذجية .....<br>تمارين و مسائل مقترحة .....<br>حلول التمارين المقترحة ..... | 7 - الحساب التكاملي        |

**محتويات الجزء الثاني :** 1 - التحليل التوافقي . 2 - الإحتمالات . 3 - الأعداد المركبة .

4 - التشابهات المستوية المباشرة . 5 - الهندسة في الفضاء .

### 1 - النهايات

• نهايات مجموع أو جداء أو حاصل قسمة دالتين

$f$  و  $g$  دالتان عدديتان،  $\alpha$  عدد حقيقي أو  $-\infty$  أو  $+\infty$ .  $\ell$  و  $\ell'$  عددان حقيقيان  
الجدول التالية تقدم المبرهنات المتعلقة بنهايات الدوال المقررة في السنة الثالثة من التعليم الثانوي.

| إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$ هي | و $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$ هي | فإن $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x))$ هي |
|------------------------------------------------|-----------------------------------------|----------------------------------------------------|
| $\ell$                                         | $\ell'$                                 | $\ell + \ell'$                                     |
| $\ell$                                         | $+\infty$                               | $+\infty$                                          |
| $\ell$                                         | $-\infty$                               | $-\infty$                                          |
| $+\infty$                                      | $+\infty$                               | $+\infty$                                          |
| $-\infty$                                      | $-\infty$                               | $-\infty$                                          |
| $+\infty$                                      | $-\infty$                               | لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.                     |

| إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \alpha}  f(x) $ هي | و $\lim_{x \rightarrow \alpha}  g(x) $ هي | فإن $\lim_{x \rightarrow \alpha}  f(x) \times g(x) $ هي |
|--------------------------------------------------|-------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| $\ell$                                           | $\ell'$                                   | $\ell \ell'$                                            |
| $\ell \neq 0$                                    | $+\infty$                                 | $+\infty$                                               |
| $+\infty$                                        | $+\infty$                                 | $+\infty$                                               |
| 0                                                | $+\infty$                                 | لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.                          |

| إذا كانت $\lim_{x \rightarrow \alpha}  f(x) $ هي | و $\lim_{x \rightarrow \alpha}  g(x) $ هي | فإن $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left  \frac{g(x)}{f(x)} \right $ هي |
|--------------------------------------------------|-------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $\ell$                                           | $\ell' \neq 0$ حيث $\ell' \neq 0$         | $\frac{\ell}{\ell'}$                                                  |
| $\ell \neq 0$                                    | 0                                         | $+\infty$                                                             |
| 0                                                | 0                                         | لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.                                        |
| $\ell$                                           | $+\infty$                                 | 0                                                                     |
| $+\infty$                                        | $\ell'$                                   | $+\infty$                                                             |
| $+\infty$                                        | $+\infty$                                 | لا توجد نتيجة يمكن النص عليها.                                        |

• ملاحظة : الحالات التي لا تسمح فيها المبرهنات بالنص على نتيجة تسمى حالات عدم التعيين : عددها

أربعة وهي من الأشكال التالية :  $+\infty - \infty$  :  $0 \times \infty$  :  $\frac{0}{0}$  :  $\frac{\infty}{\infty}$



• النهايات والحدود

1.  $f, g, h$  هي دوال معرفة في جوار  $+\infty$  حيث  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  :  $l$  عدد حقيقي.  
إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ .

2.  $f$  و  $g$  دالتان عدديتان معرفتان في جوار  $+\infty$  حيث  $f(x) \geq g(x)$ .  
إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

3.  $f$  و  $g$  دالتان عدديتان معرفتان في جوار  $+\infty$  حيث  $f(x) \leq g(x)$ .  
إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

• نهاية دالة كثير الحدود

$f$  دالة كثيرة الحدود معرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي :  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  حيث  $a_n \neq 0$  و  $n$  عدد طبيعي غير منعدم.

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a_n x^n)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (a_n x^n)$

• نهاية دالة ناطقة

$f$  دالة ناطقة حيث :  $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0}$  :  $a_n \neq 0$  و  $b_p \neq 0$  و  $n \in \mathbb{N}^*$  و  $p \in \mathbb{N}^*$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{a_n x^n}{b_p x^p} \right)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{a_n x^n}{b_p x^p} \right)$

• نهاية دالة مركبة

$f, g, h$  دوال عددية حيث  $h = g \circ f$  :  $a, b, l$  أعداد حقيقية أو  $+\infty$  أو  $-\infty$ .  
إذا كان  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  و  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = l$  فإن  $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = l$ .

• السلوك التقاربي

$f$  دالة عددية معرفة على مجال من الشكل  $]a; +\infty[$  أو  $]a; -\infty[$  حيث  $a$  عدد حقيقي معلوم و  $b$  عدد حقيقي.  $(\mathcal{E})$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم.  
إذا كان  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  (أو  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ) فإن المستقيم ذا المعادلة  $x = a$  هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{E})$ ، يوازي محور الترتيب.

إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  (أو  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ) فإن المستقيم ذا المعادلة  $y = b$  هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{E})$ ، يوازي محور الفواصل.

إذا كان  $f(x) = mx + p + \varphi(x)$  حيث  $p, m$  عددان حقيقيان و  $m \neq 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$  (أو  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$ ) فإن المستقيم ذا المعادلة  $y = mx + p$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(\mathcal{E})$ .

إذا كان  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$  و  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = p$  حيث  $p, m$  عددان حقيقيان و  $m \neq 0$ .

فإن المستقيم ذا المعادلة  $y = mx + p$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

. إذا كان  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = +\infty$  حيث  $m \neq 0$  فإن  $(\mathcal{C})$  يقبل فرع قطع مكافئ منحاه هو منحنى المستقيم ذو المعادلة  $y = mx$ .

. إذا كان  $m = 0$  فإن  $(\mathcal{C})$  يقبل فرع قطع مكافئ منحاه هو منحنى محور الفواصل.

. إذا كان  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  (أو  $-\infty$ ) فإن  $(\mathcal{C})$  يقبل فرع قطع مكافئ منحاه هو منحنى محور الترتيب.

## II - الاستمرارية

$f$  دالة معرفة على مجموعة  $D$ ،  $a$  عدد حقيقي غير منعدم من  $D$ .  $I$  مجال محتوى في  $D$ .

.  $f$  مستمرة عند  $a$  يعني  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

.  $f$  مستمرة على  $I$  يعني  $f$  مستمرة عند كل عدد حقيقي  $a$  من  $I$ .

### العمليات الجبرية

$f$  و  $g$  دالتان معرفتان على مجال  $I$ ،  $a$  عدد حقيقي ينتمي إلى  $I$ .

. إذا كانت  $f$  و  $g$  مستمرتين عند  $a$  فإن الدالتين  $f+g$  و  $f \times g$  مستمرتان عند  $a$ .

. إذا كانت  $g$  مستمرة عند  $a$  و  $g(a) \neq 0$  فإن الدالة  $\frac{1}{g}$  مستمرة عند  $a$ .

. إذا كانت  $f$  و  $g$  مستمرتين عند  $a$  و  $g(a) \neq 0$  فإن الدالة  $\frac{f}{g}$  مستمرة عند  $a$ .

. إذا كانت  $f$  مستمرة عند  $a$  و  $g$  مستمرة عند  $f(a)$  فإن الدالة  $g \circ f$  مستمرة عند  $a$ .

. الدوال كثيرة الحدود،  $\sin$ ،  $\cos$ ،  $x \mapsto |x|$  مستمرة على  $\mathbb{R}$ .

. الدوال الناطقة مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

. الدالة  $x \mapsto \sqrt{x}$  مستمرة على المجال  $[0; +\infty[$ .

### مبرهنة القيم المتوسطة

$f$  دالة معرفة على المجال  $[a; b]$ .

. إذا كانت  $f$  مستمرة على المجال  $[a; b]$  فإن من أجل كل عدد حقيقي  $m$

محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي  $c$  في المجال  $[a; b]$  حيث  $f(c) = m$ .

### التفسير الهندسي

. المستقيم ذو المعادلة  $y = m$  يقطع المنحنى الممثل للدالة  $f$  في نقطة على الأقل، فاصلتها  $c$

تنتمي إلى المجال  $[a; b]$ .

**ملاحظة:** . إذا كانت  $f$  مستمرة ورتيبة تماماً على المجال  $[a; b]$  فإن من أجل كل عدد حقيقي  $m$

محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$ ، يوجد عدد حقيقي  $c$  وحيد ينتمي إلى المجال  $[a; b]$  حيث  $f(c) = m$ .

. إذا كانت  $f$  مستمرة ورتيبة تماماً على المجال  $[a; b]$  حيث  $f(a) \cdot f(b) < 0$

فإن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً واحداً في المجال  $[a; b]$ .

1 حساب نهاية مجموع أو جداء أو حاصل قسمة دالتين

تمرين

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{(x-1)(x+2)} ; \lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt{x} + \frac{\sin x}{x} \right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2} \right) ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x)$$

حل

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2} \right)$

الدالة  $x \mapsto 1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2}$  معرفة على المجموعة  $]0; +\infty[ \cup ]-\infty; 0[$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{2}{x} \right) = 0$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{x^2} = 0$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{2}{x} + \frac{9}{x^2} \right) = 1$

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt{x} + \frac{\sin x}{x} \right)$

الدالة  $x \mapsto \sqrt{x} + \frac{\sin x}{x}$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  ( لأن  $\sin x \approx x$  بجوار العدد 0 )

إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt{x} + \frac{\sin x}{x} \right) = 1$

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{(x-1)(x+2)}$

الدالة  $x \mapsto \frac{3x}{(x-1)(x+2)}$  معرفة على المجموعة  $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x) = 3$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)(x+2) = 0$

من أجل كل عدد  $x$  قريب من 1 حيث  $x < 1$  :  $(x-1)(x+2) < 0$   
و من أجل كل عدد  $x$  قريب من 1 حيث  $x > 1$  :  $(x-1)(x+2) > 0$

حسب المبرهنات المقدمة في الجداول السابقة :

ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{(x-1)(x+2)} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{(x-1)(x+2)} = -\infty$

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x)$

الدالة  $x \mapsto x^3 + x$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x) = +\infty$

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x)$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x) = -\infty$



تمرين

$$\begin{aligned} & \text{أحسب النهايات التالية : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + \sqrt{x}}{x-1} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + x + 1) \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (x^2 + 3\sqrt{x}) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \end{aligned}$$

حل

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + x + 1)$  الدالة  $x \mapsto x^3 - x^2 + x + 1$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x + 1) = +\infty$$

المبرهنة المتعلقة بنهاية مجموع دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

$$\text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ غير منعدم, } x^3 - x^2 + x + 1 = x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 1$$

$$\text{ينتج أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + x + 1) = +\infty$$

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x + \sqrt{x}}{x-1}\right)$  الدالة  $x \mapsto \frac{4x + \sqrt{x}}{x-1}$  معرفة على  $\mathbb{R}^* - \{1\}$ .

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x + \sqrt{x}) = +\infty$$

المبرهنة المتعلقة بنهاية حاصل قسمة دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما  $x$  يختلف عن 1

$$\frac{4x + \sqrt{x}}{x-1} = \frac{x \left(4 + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{4 + \frac{\sqrt{x}}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{4 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 4$$

$$\text{إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + \sqrt{x}}{x-1} = 4$$

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$  الدالة  $x \mapsto \frac{1 - \cos x}{x^2}$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$ .

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$$

المبرهنة المتعلقة بنهاية حاصل قسمة دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

$$\text{نعلم أن } 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\text{إذن من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ غير منعدم : } \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$



بوضع  $y = \frac{x}{2}$  يكون  $\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$  و  $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin y}{y} \right)^2$  .  
 نعلم أن  $\lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\sin y}{y} \right) = 1$  إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right) = 1$

ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$  و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1$

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (x^2 + 3\sqrt{x})$  . الدالة  $x \mapsto \frac{1}{x} (x^2 + 3\sqrt{x})$  معرفة على  $]0; +\infty[$  .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3\sqrt{x}) = +\infty$

المبرهنة المتعلقة بنهاية جدا دالتين لا تسمح بإعطاء نتيجة.

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب قما :  $\frac{1}{x} (x^2 + 3\sqrt{x}) = \frac{x^2}{x} + \frac{3\sqrt{x}}{x} = x + \frac{3}{\sqrt{x}}$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$  . إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + \frac{3}{\sqrt{x}} \right) = +\infty$  . ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} (x^2 + 3\sqrt{x}) = +\infty$

### 3 استعمال الحصر لحساب نهاية دالة

#### تمرين

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sin x)$$

#### حل

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sin x)$  . الدالة  $x \mapsto (2x - \sin x)$  معرفة على  $\mathbb{R}$  .

نعلم أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $-1 \leq \sin x \leq 1$

إذا كان  $x \geq 0$  فإن  $-1 \leq \sin x \leq 1$  و  $-1 \leq -\sin x \leq 1$

ينتج أن  $2x - 1 \leq 2x - \sin x \leq 2x + 1$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1) = +\infty$

و  $2x - 1 \leq 2x - \sin x \leq 2x + 1$  . إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sin x) = +\infty$

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)$  . الدالة  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$  .

من أجل أن كل عدد حقيقي  $x$  :  $-1 \leq \sin x \leq 1$

إذا كان  $x > 0$  فإن  $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$  . لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}}$  . الدالة  $x \mapsto \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}}$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  .

من أجل أن كل عدد موجب قما  $x$  :  $-1 \leq \cos x \leq 1$  . و بالتالي  $1 \leq 2 + \cos x \leq 3$

بما أن  $\sqrt{x} > 0$  على المجال  $]0; +\infty[$  فإن  $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{3}{\sqrt{x}}$

نعلم أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$  . إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \cos x}{\sqrt{x}} = 0$

#### 4 حساب نهاية دالة مركبة

##### تمرين

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+3}$$

##### حل

• حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+3}$  . الدالة  $x \mapsto \sqrt{2x+3}$  معرفة على المجال  $[-\frac{3}{2}; +\infty[$  .  
 لتكن  $f$  الدالة  $x \mapsto 2x+3$  المعرفة على  $[-\frac{3}{2}; +\infty[$   
 و  $g$  الدالة  $y \mapsto \sqrt{y}$  المعرفة على  $[0; +\infty[$  .  
 لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[-\frac{3}{2}; +\infty[$  :  $(g \circ f)(x) = \sqrt{2x+3}$   
 بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+3) = +\infty$  و  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+3} = +\infty$  .  
 • حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x}$  .

الدالة  $x \mapsto \sqrt{x^2 - x}$  معرفة على المجموعة  $]0; +\infty[ \cup ]-\infty; -1]$  .  
 لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$  . إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} = +\infty$  .  
 • حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$  .  
 الدالة  $x \mapsto \frac{\sin 3x}{x}$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$  .

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم :  $\frac{\sin 3x}{x} = 3 \left( \frac{\sin 3x}{3x} \right)$  .  
 بوضع  $y = 3x$  نلاحظ أن  $y$  يؤول إلى 0 عندما  $x$  يؤول إلى 0 .  
 ونعلم أن  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$  . إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 1$  .  
 وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3$  أي  $\lim_{x \rightarrow 0} 3 \left( \frac{\sin 3x}{3x} \right) = 3$  .

#### 5 البحث عن المستقيمات المقاربة للمنحنى الممثل لدالة

##### تمرين 1

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{-2\}$  كما يلي :  $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x+2}$  .

و  $(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم.

1. ادرس نهاية الدالة  $f$  عن اليمين و عن اليسار عند -2 . ماذا تستنتج ؟
2. عين ثلاثة أعداد حقيقية  $a, b, c$  و  $c$  حيث من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-2\}$  :  
 $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$  .
3. استنتج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلته له.

1. الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{-2\}$ . لدينا  $\lim_{x \rightarrow -2} (x+2) = 0$  ،  $13 > 0$  ،  $\lim_{x \rightarrow -2} (3x^2 + 1) = 13$

| $x$   | $-\infty$ | $-2$    | $+\infty$ |
|-------|-----------|---------|-----------|
| $x+2$ | -         | $\circ$ | +         |

إشارة  $x+2$  ملخصة في الجدول المقابل .

ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$

و بالتالي فالمستقيم ذو المعادلة  $x = -2$  هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$ ، (بوازي محور الترتيب).

2. باستعمال القسمة الإقليدية لكثير الحدود  $3x^2 + 1$  على كثير الحدود  $x+2$  نجد حاصل القسمة هو  $3x-6$  وباقي القسمة هو 13 .

إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-2\}$  :  $\frac{3x^2 + 1}{x+2} = 3x - 6 + \frac{13}{x+2}$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-2\}$  :  $f(x) = 3x - 6 + \frac{13}{x+2}$

ينتج أن الأعداد  $a$ ،  $b$  و  $c$  المحققة للشرط هي  $a = 3$  ،  $b = -6$  و  $c = 13$  .

(يمكن الحصول على الأعداد  $a$ ،  $b$  و  $c$  باستعمال شرط تساوي كثيري حدود).

3. استنتاج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا.

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$

نلاحظ أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{13}{x+2} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{13}{x+2} = 0$

ينتج أن المستقيم ذا المعادلة  $y = 3x - 6$  هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

## تمرين 2

نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$  و  $(\mathcal{C}_g)$  المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم. أثبت أن المنحنى  $(\mathcal{C}_g)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار  $+\infty$ .

## حل

مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي  $\mathbb{R}$  لأن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $x^2 + x + 1 > 0$  .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 1) = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty$  و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

• حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم :  $\frac{g(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x} = \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$

إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$

• حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x]$  لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $g(x) - x = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$

$$= \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} - x)(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$$

$$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} = \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$



لدينا  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x}) = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + 1}) = 2$  إذن  $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - x] = \frac{1}{2}$  نستنتج أن المستقيم ذا المعادلة  $y = x + \frac{1}{2}$  مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C}_g)$  بجوار  $+\infty$ .

### تمرين 3

$f$  هي الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = \frac{x^2 - 5}{3x^2 + 1}$  و  $(\mathcal{C}_f)$  المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم. أثبت أن المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور الفواصل.

### حل

• الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

• حساب نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$ . لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5}{3x^2 + 1} = \frac{1}{3}$

إذن  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{3}$

و بالتالي المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور الفواصل معادلته  $y = \frac{1}{3}$ .

### 6 إثبات استمرارية دالة عند عدد حقيقي

### تمرين

أدرس استمرارية كل دالة من الدوال  $f, g, h$  و  $h$  التالية عند العدد  $x_0$ .

1.  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$  إذا كان  $x \neq 1$  و  $f(1) = 2$   $x_0 = 1$

2.  $g(x) = \frac{2x}{\sin x}$  إذا كان  $x \neq 0$  و  $g(0) = 0$   $x_0 = 0$

3.  $h(x) = \frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$  إذا كان  $x \neq 3$  و  $h(3) = 4$   $x_0 = 3$

### حل

1. الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

• حساب  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ . لدينا  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}-1) = 0$ .

إذن لا توجد مبرهنة تسمح بإعطاء النتيجة (أي توجد حالة عدم التعيين).

لدينا من أجل كل عدد  $x$  يختلف عن 1 :

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \sqrt{x}+1$$

إذن  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = 2$  نعلم أن  $f(1) = 2$  وبالتالي الدالة  $f$  مستمرة عند العدد 1.

2. الدالة  $g$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

• حساب  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ . لدينا  $\lim_{x \rightarrow 0} (2x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ . لا توجد مبرهنة تسمح بإعطاء النتيجة.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم.

$$\frac{2x}{\sin x} = \frac{2}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$$



## تمارين و حلول نموذجية

نعلم أن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x} = 2$  أي  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$  لدينا  $g(0) = 0$  إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq g(0)$  وبالتالي الدالة  $g$  ليست مستمرة عند العدد 0.

3. الدالة  $h$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

• حساب  $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$  لدينا  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{1+x} - 2 = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0$

لا توجد مبرهنة تسمح بإعطاء النتيجة.

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 3 :

$$h(x) = \frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3}$$

$$= \frac{(\sqrt{1+x}-2)(\sqrt{1+x}+2)}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)} = \frac{(1+x)-4}{(x-3)(\sqrt{1+x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+2}$$

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{1+x}+2) = 4$  إذن  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{1+x}-2}{x-3} = 4$

وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 4$  . نعلم أن  $h(3) = 4$ .

بما أن  $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = h(3)$  فإن الدالة  $h$  مستمرة عند العدد 3.

## 7 استعمال مبرهنة القيم المتوسطة

### تمرين

بين أن المعادلة  $x^3 + x + 1 = 0$  تقبل حلا واحدا في المجال المفتوح  $] -1 ; 0 ]$ .

### حل

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = x^3 + x + 1$

$f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  إذن  $f$  معرفة على المجال المغلق  $[-1 ; 0]$ .

الدالة  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  ( لأن  $f$  هي مجموع دوال مرجعية معرفة و مستمرة على  $\mathbb{R}$  ).

إذن  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  . وبالتالي  $f$  مستمرة على المجال  $[-1 ; 0]$ .

لدينا  $f(-1) = -1$  و  $f(0) = 1$  إذن  $f(-1)$  و  $f(0)$  مختلفان في الإشارة.

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = 3x^2 + 1$ .

نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) > 0$  . وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

ينتج أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[-1 ; 0]$ .

لدينا  $f$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $[-1 ; 0]$  و  $f(-1)$  و  $f(0)$  من إشارتين مختلفتين

إذن المعادلة  $x^3 + x + 1 = 0$  تقبل حلا وحيدا في المجال المفتوح  $] -1 ; 0 ]$ .

## تمرين 1

$f$  هي الدالة العددية المعرفة كما يلي :  $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1}$  .  
ليكن  $D$  مجموعة تعريف  $f$  و  $(\mathcal{E}_f)$  المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .  
1. عين مجموعة التعريف  $D$  للدالة  $f$  و بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  .

$$f(x) = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$$

2. احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .

3. بين أن المنحنى  $(\mathcal{E}_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار  $+\infty$  .

4. أثبت أن المنحنى  $(\mathcal{E}_f)$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار  $-\infty$  . عين معادلة لهذا المستقيم .

## حل

1. تعيين مجموعة التعريف  $D$  للدالة  $f$  . الدالة  $f$  : معرفة إذا وفقط إذا كان  $x^2 - 3x + 1 \geq 0$  .  
دراسة إشارة ثلاثي الحدود  $x^2 - 3x + 1$  .

$\Delta = 5$  ،  $\Delta > 0$  إذن ثلاثي الحدود  $x^2 - 3x + 1$  يقبل جذرين مختلفين في  $\mathbb{R}$  هما :  $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$  و  $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$  .  
باستعمال المبرهنات حول إشارة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية ،

ينتج أن  $x^2 - 3x + 1 \geq 0$  على  $D = ]-\infty; \frac{3-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty[$  .

• كتابة  $f(x)$  على الشكل  $\sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$  . ثلاثي الحدود  $x^2 - 3x + 1$  يكتب على الشكل النموذجي

كما يلي :  $x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$  .

إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  :  $f(x) = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$  .

2. حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty$

إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} = +\infty$  وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

لدينا أيضا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x + 1) = +\infty$

ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 1} = +\infty$  وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

3. إثبات أن المنحنى  $(\mathcal{E})$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار  $+\infty$  .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

• حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  .

لدينا من أجل كل  $x$  من  $D$  :  $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 1}}{x} = \frac{x \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{x} = \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}$  .

إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1$

## تمارين و حلول نموذجية

• حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب من  $D$  ،  

$$f(x) - x = \sqrt{x^2 - 3x + 1} - x = \frac{-3x + 1}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} + x}$$

$$= \frac{x(-3 + \frac{1}{x})}{x(\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} = \frac{-3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3 + \frac{1}{x}) = -3$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 = 2$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = -\frac{3}{2}$

ينتج أن المستقيم ذا المعادلة  $y = x - \frac{3}{2}$  مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$  بجوار  $+\infty$ .

4. البحث عن مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  بجوار  $-\infty$ . لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

• حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  سالب من  $D$  :  

$$\frac{f(x)}{x} = \left( -\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)$$
 بما أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \right) = -1$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

• حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x]$  من أجل كل عدد  $x$  سالب من  $D$  :  

$$f(x) + x = \sqrt{x^2 - 3x + 1} + x$$

$$= \frac{-3x + 1}{\sqrt{x^2 - 3x + 1} - x} = \frac{x(-3 + \frac{1}{x})}{x(-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1)} = \frac{-3 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1}$$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3 + \frac{1}{x}) = -3$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1) = -2$  إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \frac{3}{2}$

و بالتالي المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته  $y = -x + \frac{3}{2}$

### تمرين 2

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  
 إذا كان  $x \geq 2$  :  $f(x) = \sqrt{x - 2}$   
 وإذا كان  $x < 2$  :  $f(x) = x^2 + kx + 1$   
 • عين العدد الحقيقي  $k$  حتى تكون الدالة  $f$  مستمرة عند العدد 2.

حل

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$ . إذن الدالة  $f$  معرفة عند العدد 2 و  $f(2) = 0$ .

• حساب  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + kx + 1) = 5 + 2k \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x - 2} = 0$$

لدينا  $f(2) = 5 + 2k$  يعني  $5 + 2k = 0$  أي  $k = -\frac{5}{2}$

و بالتالي إذا كان  $k = -\frac{5}{2}$  فإن  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$  (أي  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ )

ينتج أن إذا كان  $k = -\frac{5}{2}$  فإن  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

و بالتالي الدالة  $f$  مستمرة عند العدد 2 إذا وفقط إذا كان  $k = -\frac{5}{2}$ .



## تمارين و مسائل

### المستقيمات المقاربة

في التمارين من (17) إلى (25).

(E) هو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في معلم معطى.  
ادرس وجود المستقيمات المقاربة للمنحنى (E).

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad (17)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x-1} \quad (18)$$

$$f(x) = x + 1 - \frac{3}{x^2 + 1} \quad (19)$$

$$f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x-5} \quad (20)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + \sin x}{x+1} \quad (21)$$

$$f(x) = x - \sqrt{x} \quad (22)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \quad (23)$$

$$f(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 1} \quad (24)$$

(25) نعتبر الدالة  $f$  المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \cos x - x$$

1. ادرس نهاية كل من  $f(x) - x$  و  $\frac{f(x)}{x}$  عندما  $x$  يؤول إلى  $+\infty$ .

2. بين أن المنحنى (E) الممثل للدالة  $f$  لا يقبل مستقيما مقاربا في جوار  $+\infty$ .

(الحساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  يمكن إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $-1 - x \leq f(x) \leq 1 - x$ )

### الاستمرارية

في التمارين من (26) إلى (28).

$f$  دالة عددية و  $x_0$  عدد حقيقي، يطلب دراسة استمرارية الدالة  $f$  عند  $x_0$ .

$$x_0 = 1 : f(x) = x^2 - 2x \quad (26)$$

$$x_0 = 0 : f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (27)$$

$$x_0 \neq 0 : f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad (28)$$

و  $f(0) = 1$

### العمليات على النهايات

في التمارين من (1) إلى (7)، يطلب حساب نهاية الدالة  $f$  عندما يؤول  $x$  إلى العدد  $a$ .

$$a = 1 + \infty : f(x) = x^2 + x + 1 \quad (1)$$

$$a = 0 : f(x) = x^3 + 3x \quad (2)$$

$$a = +\infty : f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4 \quad (3)$$

$$a = +\infty : f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} \quad (4)$$

$$a = +\infty : f(x) = x^3 \left( \cos \frac{1}{x} - 2 \right) \quad (5)$$

$$a = 1 \text{ أو } a = +\infty : f(x) = \frac{x+2}{x-1} \quad (6)$$

$$a = -\infty : f(x) = \frac{x+2}{x-1} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{E(x)}{x} \quad (7) \text{ حيث } E(x) \text{ هو الجزء الصحيح للعدد } x.$$

$$a = +\infty$$

في التمارين التالية من (8) إلى (16)، يطلب

تعيين نهايات الدالة  $f$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$ .

$$a = -5 \text{ أو } a = 2 : f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} \quad (8)$$

$$a = -\infty \text{ أو } a = +\infty$$

$$a = -\frac{3}{2} \text{ أو } a = \frac{3}{2} : f(x) = \frac{8x^2 - 27}{4x^2 - 9} \quad (9)$$

$$a = -\infty \text{ أو } a = +\infty$$

$$a = +\infty : f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x \quad (10)$$

$$a = +\infty : f(x) = \frac{3x - 5}{x + 1} - \frac{\sin x}{x} \quad (11)$$

$$a = 1 : f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \quad (12)$$

$$a = 0 : f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (13)$$

$$a = 0 : f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad (14)$$

$$a = \frac{\pi}{3} : f(x) = \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}} \quad (15)$$

$$a = 0 : f(x) = \frac{\tan 3x}{\sin 5x} \quad (16)$$

## تمارين و مسائل

- عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$   
 - حدد الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  و المستقيم المقارب المائل له.

**37**  $f$  دالة عددية معرفة كما يلي :

$$m \in \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} + mx$$

- عين نهايات الدالة  $f$  عندما  $x$  يؤول إلى  $-\infty$  أو  $+\infty$   
 (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي  $m$ ).

**38**  $f_1$  هي الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$f_1(x) = \sin(x^2 + x + 1)$$

- أثبت أن الدالة  $f_1$  مستمرة عند كل عدد حقيقي  $x_0$

**39** ادرس  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

**40**  $f$  هي دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 5}{(x+1)^2}$$

- (1) بين أنه يوجد عدنان حقيقيان  $a$  و  $b$  حيث  
 من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $-1$  :

$$f(x) = ax + b + \varphi(x)$$

$$\text{حيث } \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$$

- (2) عين نهايات الدالة  $f$  عند حدود مجموعة تعريفها.

- (3) عين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$   
 المثل للدالة  $f$  في معلم  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

- 41** طول حرف مكعب هو  $x$  cm و أبعاد متوازي المستطيلات هي  $1$  cm ،  $3$  cm و  $(3x+4)$  cm

- أوجد حصرا لقيمة  $x$  التي من أجلها يكون حجم المكعب يساوي حجم متوازي المستطيلات.  
 بين أن  $3,5 < x < 3,6$ .

$$\textcircled{29} \quad f(x) = \frac{2x^2 + |x|}{x} : x_0 = 0$$

### خواص الدوال المستمرة على مجال

**30** (1) ادرس تغيرات الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$\text{كما يلي : } f(x) = 2x^3 + 5x - 4$$

- (2) استنتج أن المعادلة  $2x^3 + 5x - 4 = 0$  تقبل حلا واحدا في المجال المفتوح  $]0; 1[$ .

**31** نفس السؤال بالنسبة للمعادلة

$$x^6 + x^2 - 1 = 0$$

**32** (1) ادرس تغيرات الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$\text{كما يلي : } f(x) = x^3 - 3x + 1$$

- (2) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا واحدا في المجال  $] -1; 1[$ .

**33**  $f$  هي الدالة المعرفة كما يلي  $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$

- بين أن المعادلة  $f(x) = 2$  تقبل حلا واحدا  $\alpha$  في المجال  $]2; 3[$ .

**34** بين أن المعادلة  $\cos x = x$  تقبل حلا

واحدا في  $\mathbb{R}$ .

**35** بين أن المعادلة  $-x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$  تقبل

حلا واحدا في المجال المفتوح  $]1; 3[$ .

### مسائل

**36**  $f$  هي دالة عددية معرفة كما يلي

$$f(x) = \frac{5x^2 + x + 1}{x + 2}$$

- (1) عين مجموعة تعريف  $D$  للدالة  $f$  و بين أنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية  $a$  ،  $b$  و  $c$  حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ،

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+2}$$

(2) ليكن  $(\mathcal{C}_f)$  المنحنى المثل للدالة  $f$

في المستوي المنسوب إلى المعلم  $(\vec{O}; \vec{i}, \vec{j})$ .

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard\_equation



• قابلية الاشتقاق عند عدد حقيقي

ف دالة معرفة على مجال مفتوح يشمل العدد الحقيقي  $x_0$ .  
 الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$  إذا و فقط إذا كانت نهاية الدالة  
 عددا حقيقيا عندما  $h$  يؤول إلى 0.  
 هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة  $f$  عند  $x_0$  و يرمز له  $f'(x_0)$ .  
 نكتب  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$  أو  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

• قابلية الاشتقاق على مجال - الدالة المشتقة لدالة

ف دالة معرفة على مجال  $I$ .  
 الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  إذا و فقط إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $I$ .  
 الدالة  $f' : x \mapsto f'(x)$  حيث  $f'(x)$  هو العدد المشتق للدالة  $f$  عند العدد  $x$  تسمى الدالة المشتقة للدالة  $f$ .

• معادلة المماس

ف دالة معرفة على مجال  $I$  يشمل العدد الحقيقي  $x_0$ .  
 $(\mathbb{R}^n)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .  
 إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$  فإن المنحنى  $(\mathbb{R}^n)$  يقبل مماسا  $(T)$  عند النقطة  $A$  فاصلتها  $x_0$ .  
 معامل توجيه المماس  $(T)$  هو  $f'(x_0)$ .  
 معادلة المماس  $(T)$  هي :  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

• التقريب التآلفي لدالة عند عدد حقيقي

ف دالة معرفة على مجال  $I$  يشمل العدد  $x_0$ .  
 الدالة التآلفية  $g$  المعرفة كما يلي :  $g : x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$   
 تسمى التقريب التآلفي للمماس للدالة  $f$  عند العدد  $x_0$ .

• قابلية الاشتقاق والاستمرارية

ف دالة معرفة على مجال  $I$  يشمل العدد  $x_0$ .  
 إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$  فإن  $f$  مستمرة عند  $x_0$ . (العكس غير صحيح).

الدوال المشتقة لدوال مألوفة

| الدالة ...                         | معرفة على ...                                                          | قابلة للاشتقاق على ...                                                 | دالتها المشتقة هي ...           |
|------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| $k \in \mathbb{R} : x \mapsto k$   | $\mathbb{R}$                                                           | $\mathbb{R}$                                                           | $x \mapsto 0$                   |
| $n \in \mathbb{Z} : x \mapsto x^n$ | $\mathbb{R}$ إذا كان $n \geq 0$<br>$\mathbb{R}^*$ إذا كان $n < 0$      | $\mathbb{R}$ إذا كان $n \geq 0$<br>$\mathbb{R}^*$ إذا كان $n < 0$      | $x \mapsto nx^{n-1}$            |
| $x \mapsto \sqrt{x}$               | $[0 ; +\infty[$                                                        | $[0 ; +\infty[$                                                        | $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $x \mapsto \sin x$                 | $\mathbb{R}$                                                           | $\mathbb{R}$                                                           | $x \mapsto \cos x$              |
| $x \mapsto \cos x$                 | $\mathbb{R}$                                                           | $\mathbb{R}$                                                           | $x \mapsto -\sin x$             |
| $x \mapsto \tan x$                 | $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ | $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ | $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$  |

العمليات الجبرية

$f, g$  دالتان معرفتان على نفس المجال  $I$  :  $k$  عدد حقيقي.

إذا كانت  $f$  و  $g$  قابلتين للاشتقاق على المجال  $I$  فإن :

• الدالة  $f+g$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و  $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

• الدالة  $k.f$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و  $(k.f)'(x) = k.f'(x)$

• الدالة  $f.g$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و  $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

• الدالة  $\frac{1}{g}$  قابلة للاشتقاق على  $I$  حيث  $g(x) \neq 0$  و  $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$

• الدالة  $\frac{f}{g}$  قابلة للاشتقاق على  $I$  حيث  $g(x) \neq 0$  و  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$

الدالة المشتقة لدالة مركبة

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  يشمل العدد  $x_0$ ,  $g$  دالة معرفة على مجال  $J$  يشمل  $f(x_0)$ .

• إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$  و  $g$  قابلة للاشتقاق عند  $f(x_0)$  فإن الدالة  $g \circ f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0).g'[f(x_0)] \quad \text{و}$$

حالات خاصة

$f$  دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  :  $n \in \mathbb{Z}$  عدد صحيح.

• الدالة  $[f(x)]^n$  :  $x \mapsto [f(x)]^n$  قابلة للاشتقاق على  $I$  (حيث  $f(x) \neq 0$  من أجل  $n < 0$ )

$$\text{و } g'(x) = n.f'(x).[f(x)]^{n-1}$$

• الدالة  $\sqrt[n]{f(x)}$  :  $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$  قابلة للاشتقاق على  $I$  (حيث  $f(x) > 0$ ) و  $h'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

## • اتجاه تغيرات دالة

$f$  دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال  $I$ .

- إذا كان من أجل كل عدد  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) = 0$  فإن الدالة  $f$  ثابتة على  $I$ .
- إذا كان من أجل كل عدد  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) = 0$  من أجل قيم معزولة من  $I$ ) فإن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $I$ .
- إذا كان من أجل كل عدد  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) \leq 0$  ( $f'(x) = 0$  من أجل قيم معزولة من  $I$ ) فإن الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $I$ .

## • النقطة الحدية للمنحنى

- $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح  $I$  يشمل العدد  $x_0$ .
- $(\mathcal{C}_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم.
- إذا كانت  $f$  تقبل قيمة حدية محلية عند  $x_0$  فإن  $f'(x_0) = 0$ .
- إذا كانت  $f'$  تنعدم عند  $x_0$  و تغير إشارتها فإن  $f$  تقبل قيمة حدية محلية عند  $x_0$ .
- (العدد  $f(x_0)$  هو قيمة عظمى أو قيمة صغرى للدالة  $f$  عند  $x_0$  من  $I$ ).
- في هذه الحالة النقطة ذات الإحداثيين  $(x_0 ; f(x_0))$  تسمى نقطة حدية للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ .
- المماس للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  عند نقطة حدية فاصلتها  $x_0$ ، يوازي محور الفواصل و معادلته هي  $y = f(x_0)$ .

## • الدوال المشتقة المتتابة

- $f$  دالة قابلة للاشتقاق  $n$  مرة على مجال  $I$  حيث  $n \geq 1$ .
- $f'$  دالتها المشتقة من المرتبة 1 :  $f^{(2)} = f'' = (f')'$  دالتها المشتقة من المرتبة 2 : ...
- $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$  دالتها المشتقة من المرتبة  $n$ .

$$\text{نضع : } f'(x) = \frac{df}{dx} \text{ أو } y' = \frac{dy}{dx} : f''(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right) = \frac{d^2 f}{dx^2} : f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

## • نقطة إنعطاف لمنحنى

- $f$  دالة معرفة على مجال  $I$  و قابلة للاشتقاق مرتان على  $I$ ،  $x_0$  ينتمي إلى  $I$ ،  $(\mathcal{C}_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم.
- إذا كانت الدالة  $f$  تنعدم و تغير الإشارة عند  $x_0$  فإن النقطة  $A$  ذات الفاصلة  $x_0$  تسمى نقطة انعطاف للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  الممثل للدالة  $f$ .
- المماس عند النقطة  $A$  يقطع المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  فيها.



## المعادلات التفاضلية

$f$  دالة مألوفة، مستمرة على مجال  $I$ .

• حل معادلة تفاضلية من الشكل  $y' = f(x)$  أو  $y'' = f(x)$

• نبحث عن الدوال  $g$  القابلة للاشتقاق مرة أو مرتين على  $I$  حيث  $g'(x) = f(x)$  أو  $g''(x) = f(x)$ .

• حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال  $x \mapsto g(x)$ .

• حل معادلة تفاضلية من الشكل  $y' = f(x)$  أو  $y'' = f(x)$  نستعين بجدول الدوال المشتقة لدوال مألوفة.

## مخطط لدراسة دالة

يمكن تنظيم دراسة دالة  $f$  حسب المخطط التالي :

• نعين مجموعة التعريف (تبسيط عبارة  $f(x)$  عند الضرورة).

• نعين مجموعة دراسة الدالة : خواص هندسية للمنحنى (دالة فردية، دالة زوجية، دالة دورية).

• نحسب النهايات عند حدود مجموعة الدراسة.

• ندرس الاستمرارية، الاشتقاق، التغيرات :

نحسب الدالة المشتقة، ندرس إشارتها ثم نستنتج اتجاه تغير الدالة.

• ندرس الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة.

• نرسم التمثيل البياني بعد تعليم بعض النقاط الخاصة (مركز تناظر، نقطة إنعطاف، ...) و بعض

المستقيمات الخاصة (محور تناظر، مستقيمات مقاربة، مماسات، ...).

• نستفيد من الخواص البارزة لانهماز الرسم (عناصر التناظر، ...).

## 1 دراسة قابلية اشتقاق دالة عند عدد حقيقي و تعيين العدد المشتق

## تقرين

• أدرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  عند العدد الحقيقي  $x_0$  ثم عين العدد المشتق  $f'(x_0)$  عند وجوده في كل حالة من الحالات التالية :

$$x_0 = 0 : f(x) = \sqrt{x} \quad \bullet 4 \quad x_0 = 0 : f(x) = x^2 - 2x - \sin x \quad \bullet 1$$

$$x_0 = 1 : f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \bullet 5 \quad x_0 = -1 : f(x) = (2x-3)^2 \quad \bullet 2$$

$$x_0 = 0 : f(x) = x^2 + |x| \quad \bullet 3$$

## حل

1. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = x^2 - 2x - \sin x$  عند العدد 0.

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  (لأن  $f$  مجموع دوال معرفة على  $\mathbb{R}$ ) و  $f(0) = 0$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم ،  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - 2x - \sin x}{x} = x - 2 - \frac{\sin x}{x}$  ،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -3 \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x - 2 - \frac{\sin x}{x} \right) = 0 - 2 - 1 = -3 \quad \text{و}$$

بما أن نهاية النسبة  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$  عندما  $x$  يؤول إلى 0 هي عدد حقيقي، فإن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق

عند العدد 0 و العدد المشتق للدالة  $f$  عند 0 هو  $f'(0) = -3$  حيث  $f'(0) = -3$ .

2. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = (2x-3)^2$  عند -1.

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  لأنها مربع دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  و  $f(-1) = 25$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن -1.

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{(2x-3)^2 - 25}{x+1} = \frac{(2x-8) \times 2(x+1)}{x+1} = 4x - 16$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = -20 \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (4x - 16) = -20 \quad \text{لدينا}$$

بما أن نهاية النسبة  $\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)}$  عند ما يؤول  $x$  إلى -1 هي عدد حقيقي، فإن الدالة  $f$  قابلة

للاشتقاق عند -1 و  $f'(-1) = -20$ .

3. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = x^2 + |x|$  عند العدد 0.

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  (مجموع دالتين معرفتين على  $\mathbb{R}$ ) و  $f(0) = 0$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم ،  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 + |x|}{x} = x + \frac{|x|}{x}$  ،

نعلم أن  $|x| = x$  إذا كان  $x \geq 0$  و  $|x| = -x$  إذا كان  $x \leq 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( x + \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1 \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( x - \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) = -1 \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \text{بما أن}$$

فإن النسبة  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$  لا تقبل نهاية عند العدد 0.

و بالتالي الدالة  $f$  حيث  $f(x) = x^2 + |x|$  غير قابلة للاشتقاق عند العدد 0 مع الملاحظة أن  $f$

قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليمين و  $f'(0) = 1$  و قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليسار و  $f'(0) = -1$

4. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = \sqrt{x}$  عند 0.

الدالة  $f$  معرفة عند 0 و  $f(0) = 0$ .

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ موجب تماما.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$ . هذه النهاية ليست عددا حقيقيا.

ينتج أن الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \sqrt{x}$  غير قابلة للاشتقاق عند 0.

4. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  عند 1.

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$ .

بما أن الدالة  $f$  غير معرفة عند العدد 1 فإنها غير قابلة للاشتقاق عند العدد 1.

## 2. تعيين معادلة مماس للمنحنى الممثل لدالة عند نقطة منه فاصلتها $x_0$

### تمرين

• في كل حالة من الحالات التالية، حدد إن كان المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  يقبل مماسا أو نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0$ . عين معادلة لهذا المماس عند وجوده.

$$x_0 = 1 : f(x) = |x^3 - 1| \quad \bullet 3$$

$$x_0 = 1 : f(x) = 3x^2 - x - 2 \quad \bullet 1$$

$$x_0 = \frac{\pi}{4} : f(x) = \cos x \quad \bullet 4$$

$$x_0 = 2 : f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} \quad \bullet 2$$



1. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ:  $f(x) = 3x^2 - x - 2$  عند العدد 1.  
الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  و  $f(1) = 0$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 1

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1} = \frac{(3x + 2)(x - 1)}{x - 1} = 3x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 5 \text{ لدينا أيضا}$$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 5$  هي عدد حقيقي فإن  $f$  قابلة للاشتقاق عند 1 و  $f'(1) = 5$ .

ينتج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 1، معادلته  $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ .

لدينا  $f(1) = 0$  و  $f'(1) = 5$ . إذن معادلة المماس هي  $y = 5x - 5$ .

2. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ:  $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$  عند العدد 2.

الدالة  $f$  معرفة عند كل عدد حقيقي  $x$  حيث  $x^2 - x - 2 \geq 0$ .

2 و 1- هما جذرا ثلاثي الحدود  $x^2 - x - 2$ .

إذن مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي  $]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$  و  $f(2) = 0$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]2; +\infty[$ :

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2} = \frac{\sqrt{(x + 1)(x - 2)}}{x - 2} = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x + 1}{x - 2}} = +\infty \text{ لدينا}$$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = +\infty$  ليست عددا حقيقيا فإن الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند العدد 2.

ينتج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل نصف مماس يوازي محور الترتيب معادلته  $x = 2$  مع  $x \geq 2$ .

3. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ:  $f(x) = |x^3 - 1|$  عند العدد 1.

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  و  $f(1) = 0$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 1

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{|x^3 - 1| - 0}{x - 1} = \frac{|x^3 - 1|}{x - 1}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1 \text{ فإن } x > 1 \text{ نلاحظ أن إذا كان}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-(x^3 - 1)}{x - 1} = \frac{-(x - 2)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = -(x^2 + x + 1) \text{ فإن } x < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3 \text{ ينتج أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} [-(x^2 + x + 1)] = -3 \text{ و}$$

$$\text{نلاحظ أن } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \text{ هما عددان حقيقيان مختلفان إذن الدالة } f$$

قابلة للاشتقاق عند العدد 1 عن اليمين و عن اليسار و ليست قابلة للاشتقاق عند العدد 1 .  
و بالتالي المنحى (C) يقبل نصف مماس (Δ<sub>1</sub>) عن اليمين و نصف مماس (Δ<sub>2</sub>) عن اليسار عند النقطة من (C) ذات الفاصلة 1 .

• إيجاد معادلة نصف المماس (Δ<sub>1</sub>).

$$\text{لدينا } y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ حيث } f'(1) = 3 \text{ أي } y = 3(x - 1) + 0$$

$$\text{إذن } (Δ_1) : y = 3x - 3 \text{ حيث } x \geq 1$$

• إيجاد معادلة نصف المماس (Δ<sub>2</sub>).

$$\text{لدينا } y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ حيث } f'(1) = -3$$

$$\text{أي } y = -3(x - 1) + 0$$

$$\text{إذن } (Δ_2) : y = -3x + 3 \text{ حيث } x \leq 1$$

3 . دراسة قابلية اشتقاق الدالة f المعرفة بـ :  $f(x) = \cos x$  عند العدد  $\frac{\pi}{4}$

$$\text{الدالة } f \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ و } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن  $\frac{\pi}{4}$  :

$$\frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{-2 \sin \left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \sin \left(\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{-\sin \left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)}{\left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)} \cdot \sin \left(\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sin \left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)}{\left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)} = -1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin \left(\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ لدينا}$$

$$\text{إذن } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ينتج أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند العدد  $\frac{\pi}{4}$  و  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  و بالتالي المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل مماسا  $(\Delta)$

عند النقطة ذات الفاصلة  $\frac{\pi}{4}$  معادلته  $y = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

أي  $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$  ينتج أن  $(\Delta) : y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$

### 3 تعيين الدالة المشتقة لدالة

#### تمرين

• عين مجموعة تعريف كل دالة  $f$  من الدوال التالية ثم مجموعة قابلية الاشتقاق و الدالة المشتقة لها.

$$f(x) = \cos 2x - 2\cos x \quad \bullet 5$$

$$f(x) = \sqrt{2(1 - \cos x)} \quad \bullet 6$$

$$f(x) = (5x^2 - x)^3 \quad \bullet 7$$

$$f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \bullet 8$$

$$f(x) = x^2 + x + \frac{3}{x} \quad \bullet 1$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 1} \quad \bullet 2$$

$$f(x) = x + 3\sqrt{x^2 - 1} \quad \bullet 3$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1} \quad \bullet 4$$

#### حل

1. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  حيث :  $f(x) = x^2 + x + \frac{3}{x}$

الدالة  $f$  معرفة على  $]0; +\infty[ \cup ]-\infty; 0[$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $] -\infty; 0[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم ،  $f'(x) = 2x + 1 - \frac{3}{x^2}$

2. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  حيث :  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 1}$

الدالة  $f$  معرفة على  $]1; +\infty[ \cup ]-\infty; 1[$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]1; +\infty[$  و  $] -\infty; 1[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 1 ،  $f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x - 1)^2}$

3. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  حيث :  $f(x) = x + 3\sqrt{x^2 - 1}$

الدالة  $f$  معرفة على  $]1; +\infty[ \cup ]-\infty; -1[$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]1; +\infty[$  و  $] -\infty; -1[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجموعة  $]1; +\infty[ \cup ]-\infty; -1[$  ،  $f'(x) = 1 + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}}$



4. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$

الدالة  $f$  معرفة على  $[-\infty; -1 - \sqrt{2}] \cup [-1 + \sqrt{2}; +\infty]$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $[-1 + \sqrt{2}; +\infty]$  و  $[-\infty; -1 - \sqrt{2}]$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $[-1 + \sqrt{2}; +\infty] \cup [-\infty; -1 - \sqrt{2}]$  :  $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$

5. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  حيث :  $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$

الدالة  $f$  معرفة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = -2\sin 2x + 2\sin x$

6. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  حيث :  $f(x) = \sqrt{2(1 - \cos x)}$

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  لأن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $1 - \cos x \geq 0$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $2k\pi$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $2k\pi$  :  $f'(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2(1 - \cos x)}}$

7. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = (5x^2 - x)^3$

الدالة  $f$  معرفة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

بوضع  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = 5x^2 - x$

لدينا الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $g'(x) = 10x - 1$

نلاحظ أن  $f(x) = [g(x)]^3$  إذن  $f'(x) = 3 \times g'(x) \cdot g(x)^2$

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = 3(10x - 1)(5x^2 - x)^2$

8. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

الدالة  $f$  معرفة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = 2x + \frac{\pi}{3}$

و  $h$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $h(x) = \sin x$  ينتج أن  $f = h \circ g$

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $g'(x) = 2$

و الدالة  $h$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $h'(x) = \cos x$

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = g'(x) \times h'(g(x)) = 2 \times \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

إذن الدالة المشتقة للدالة  $f$  هي الدالة  $f'$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f'(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

## تقريب

• ادرس اتجاه تغيرات كل دالة  $f$  من الدوال التالية المعرفة كما يلي :

$$f(x) = 5x + 1 + \frac{1}{x} \quad \bullet 3$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2} \quad \bullet 1$$

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} \quad \bullet 4$$

$$f(x) = x + \sin x \quad \bullet 2$$

## حل

1. دراسة تغيرات الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  (لأن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $x^2 + 2 > 0$ ).

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب ،  $f'(x) \geq 0$  . إذن الدالة  $f$  متزايدة على  $[0 ; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  سالب ،  $f'(x) \leq 0$  . إذن الدالة  $f$  متناقصة على  $] -\infty ; 0]$ .

2. دراسة تغيرات الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = x + \sin x$

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = 1 + \cos x$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $1 + \cos x \geq 0$

وبالتالي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) \geq 0$  . ينتج أن الدالة متزايدة على  $\mathbb{R}$ .

3. دراسة تغيرات الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = 5x + 1 + \frac{1}{x}$

الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $] -\infty ; 0[ \cup ] 0 ; +\infty [$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $] -\infty ; 0[$  و  $] 0 ; +\infty [$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم ،  $f'(x) = 5 - \frac{1}{x^2}$

إشارة  $f'(x)$  ملخصة في الجدول المقابل.

الدالة  $f$  متزايدة على كل من المجالين

$$\left] -\frac{\sqrt{5}}{5} ; -\infty \right[ \text{ و } \left] \frac{\sqrt{5}}{5} ; +\infty \right[$$

و متناقصة على كل من المجالين  $\left] 0 ; \frac{\sqrt{5}}{5} \right[$  و  $\left] -\frac{\sqrt{5}}{5} ; 0 \right[$

| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{5}}{5}$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------------------|-----|----------------------|-----------|
| $f'(x)$ | +         | ○                     | -   | ○                    | +         |

4. دراسة تغيرات الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ .

الدالة  $f$  معرفة على المجال  $[0; +\infty[$  و قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما ،  $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

إشارة  $f'(x)$  ملخصة في الجدول المقابل :

| $x$     | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---------|---|---|-----------|
| $f'(x)$ | - | 0 | +         |

الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $]0; 1]$

و متزايدة على المجال  $[1; +\infty[$ .

## 5 إيجاد القيم الحدية للدالة

### تمرين

• عين القيم الحدية لكل دالة من الدوال  $f$  المعرفة كما يلي :

1.  $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$  3.  $f(x) = x - 2\sqrt{x-2}$

2.  $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$

### حل

1. تعيين القيم الحدية للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ .

• الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]-\infty; +\infty[$ .

• الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]-\infty; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = -4x^3 + 4x$ .

$f'(x) = 4x(1-x)(1+x)$  يكتب على الشكل

| $x$          | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ |   |
|--------------|-----------|----|---|---|-----------|---|
| $(1-x)(1+x)$ | -         | 0  | + | + | 0         | - |
| $4x$         | -         | -  | 0 | + | +         | + |
| $f'(x)$      | +         | 0  | - | + | 0         | - |

إشارة  $f'(x)$  ملخصة في الجدول المقابل :

• استنتاج القيم الحدية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

الدالة  $f'$  تنعدم و تغير الإشارة عند كل

من الأعداد -1 ، 0 ، 1

إذن الدالة  $f$  تقبل قيمة كبرى عند -1 على المجال  $]-\infty; 0]$  و هي  $f(-1) = 2$ .

و الدالة  $f$  تقبل قيمة صغرى عند 0 على المجال  $[-1; 1]$  و هي  $f(0) = 1$ .

و الدالة  $f$  تقبل قيمة كبرى عند 1 على المجال  $[0; +\infty[$  و هي  $f(1) = 2$ .

2. تعيين القيم الحدية للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$ .

• الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]-\infty; +\infty[$  و قابلة للاشتقاق على المجال  $]-\infty; +\infty[$ .

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = 12x^2 - 3$ .

$f'(x) = 3(2x+1)(2x-1)$  يكتب أيضا على الشكل :



| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|----------------|---------------|-----------|
| $f'(x)$ | +         | $\circ$        | $\circ$       | +         |

إشارة  $f'(x)$  ملخصة في الجدول المقابل :

• استنتاج القيم الحدية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

الدالة  $f'$  تنعدم و تغير الإشارة عند  $-\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$

إذن الدالة  $f$  تقبل قيمة كبرى على المجال  $]-\infty; \frac{1}{2}]$  وهي  $f(-\frac{1}{2}) = 0$  حيث  $f(-\frac{1}{2}) = 0$

و تقبل قيمة صغرى على المجال  $[-\frac{1}{2}; +\infty[$  وهي  $f(\frac{1}{2}) = -2$  حيث  $f(\frac{1}{2}) = -2$

3. تعيين القيم الحدية للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = x - 2\sqrt{x-2}$

• الدالة  $f$  معرفة على المجال  $[2; +\infty[$ .

• الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[2; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $[2; +\infty[$  :  $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

$f'(x)$  يكتب أيضا على الشكل :  $f'(x) = \frac{\sqrt{x-2} - 1}{\sqrt{x-2}}$

إشارة  $f'(x)$  على المجال  $[2; +\infty[$  هي إشارة  $\sqrt{x-2} - 1$  على المجال  $[2; +\infty[$ .

إشارة  $f'(x)$  على المجال  $[2; +\infty[$  ملخصة في الجدول المقابل :

| $x$     | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
|---------|-----------|---|-----------|
| $f'(x)$ | -         | ○ | +         |

الدالة  $f'$  تنعدم و تغير الإشارة عند 3

إذن الدالة  $f$  تقبل قيمة صغرى عند

العدد 3 و هي  $f(3) = 1$  حيث  $f(3) = 1$

## 6 البحث عن الدوال المشتقة المتتابة لدالة

### تمرين 1

• عين الدالة المشتقة الثانية للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$   
• أثبت أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  يقبل نقطة انعطاف، يطلب تعيين إحداثياتها.

حل

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  (لأن  $f$  دالة كثير الحدود)

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = 3x^2 - 6x$

الدالة  $f'$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f''(x) = 6x - 6$

الدالة  $f''$  تنعدم عند العدد 1 و تغير الإشارة إذن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل نقطة انعطاف إحداثياتها (1 ; 2).

### تمرين 2

• عين الدالة المشتقة من المرتبة  $n$  لكل من الدالتين  $\sin$  و  $\cos$  :  $n$  عدد طبيعي غير منعدم.

1. تعيين الدالة المشتقة من المرتبة  $n$  للدالة  $\sin$ .

الدالة  $\sin$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ ،  $n$  مرة حيث  $n \geq 1$ .

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $(\sin)'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$(\sin)''(x) = (\cos x)'(x) = -\sin x = \sin\left(x + \pi\right) = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

يمكن وضع التخمين التالي :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم، من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $(\sin)^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ ، استعمال الاستدلال بالتراجع لإثبات صحة هذا التخمين.

من أجل  $n = 1$  :  $(\sin)^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$  أي  $(\sin)'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

نفرض أن من أجل العدد الطبيعي  $k$  غير المنعدم،  $(\sin)^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$ .

• حساب  $(\sin)^{(k+1)}(x)$ .

$$(\sin)^{(k+1)}(x) = \left[\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $k$  غير منعدم و من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،

إذا كان  $(\sin)^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$  فإن  $(\sin)^{(k+1)}(x) = \sin\left(x + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)$ .

إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم :  $(\sin)^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

و بالتالي الدالة المشتقة من المرتبة  $n$  للدالة  $\sin$  هي الدالة  $\sin^{(n)}$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

2. نبرهن بنفس الطريقة أن الدالة المشتقة من المرتبة  $n$  للدالة  $\cos$  هي الدالة  $\cos^{(n)}$  المعرفة على  $\mathbb{R}$

كما يلي :  $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$

8 حل معادلة تفاضلية من الشكل  $y' = f(x)$  أو  $y'' = f(x)$  حيث  $f$  دالة مألوفة

تمرين

• حل كل معادلة التفاضلية من المعادلات التالية :

$$y' = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \quad \bullet 5$$

$$y' = 3x - 2 \quad \bullet 1$$

$$y'' = 2 \quad \bullet 6$$

$$y' = \sin x \quad \bullet 2$$

$$y'' = \sin x \quad \bullet 7$$

$$y' = x + \sin x \quad \bullet 3$$

$$y'' = \cos x \quad \bullet 8$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \bullet 4$$

1. حل المعادلة التفاضلية  $y' = 3x - 2$ .

نبحث عن الدوال العددية  $f$  القابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  حيث  $f'(x) = 3x - 2$ .

الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x$  تحقق المعادلة التفاضلية  $y' = 3x - 2$  لأن  $f'(x) = 3x - 2$ .

ينتج أن الدوال العددية حلول المعادلة التفاضلية  $y' = 3x - 2$  هي الدوال  $f$  المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + c \quad \text{حيث } c \text{ عدد حقيقي.}$$

2. حل المعادلة التفاضلية  $y' = \sin x$ .

نبحث عن الدوال العددية  $f$  القابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  حيث  $f'(x) = \sin x$ .

$$\cos' x = -\sin x$$

$$\text{إذن } -\cos' x = \sin x \quad \text{أي } (-\cos)'(x) = \sin x$$

وبالتالي الدالة  $-\cos$  هي حل للمعادلة التفاضلية  $y' = \sin x$ . ينتج أن الدوال العددية حلول المعادلة

التفاضلية  $y' = \sin x$  هي الدوال  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = -\cos x + c$  حيث  $c$  عدد حقيقي.

3. حل المعادلة التفاضلية  $y' = x + \sin x$ .

باستعمال النتائج المحصل عليها في الحالتين السابقتين، تكون حلول المعادلة التفاضلية

$$y' = x + \sin x \quad \text{هي الدوال } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + c$$

حيث  $c$  عدد حقيقي.

4. حلول المعادلة التفاضلية  $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  هي الدوال  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي :

$$f(x) = 2\sqrt{x} + c \quad \text{حيث } c \text{ عدد حقيقي.}$$

5. حلول المعادلة التفاضلية  $y' = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$  هي الدوال  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = 2\sqrt{x^2+x+1} \quad \text{حيث } c \text{ عدد حقيقي.}$$

6. حلول المعادلة التفاضلية  $y'' = 2$  هي الدوال  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = x^2 + cx + d \quad \text{حيث } c \text{ و } d \text{ عددان حقيقيان.}$$

7. حلول المعادلة التفاضلية  $y'' = \sin x$  هي الدوال  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = -\sin x + cx + d \quad \text{حيث } c \text{ و } d \text{ عددان حقيقيان.}$$

8. حلول المعادلة التفاضلية  $y'' = \cos x$  هي الدوال  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = -\cos x + cx + d \quad \text{حيث } c \text{ و } d \text{ عددان حقيقيان.}$$



•  $f$  هي الدالة المعرفة كما يلي :  $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2}$

( $\mathbb{R}$ ) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و مجانس ( $O; \vec{i}, \vec{j}$ ).

- عين مجموعة تعريف  $D$  للدالة  $f$ .
- أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ،  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2}$  ، حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية يطلب تعيينها.
- عين نهايات الدالة  $f$  عند حدود المجموعة  $D$ .
- ادرس تغيرات الدالة  $f$  و انجز جدول تغيراتها.
- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى ( $\mathbb{R}$ ).
- ادرس الوضع النسبي للمنحنى ( $\mathbb{R}$ ) و المستقيم المقارب ( $\Delta$ ) للمنحنى ( $\mathbb{R}$ ).
- احسب  $f(-1)$  . ماذا تستنتج ؟ ارسم المنحنى ( $\mathbb{R}$ ) في المعلم السابق.
- ناقش بيانيا ، عدد و إشارة حلول المعادلة  $2x^3 + (1-m)x^2 + 1 = 0$  في  $\mathbb{R}$  حسب قيم العدد الحقيقي  $m$ .

## حل

1. الدالة  $f$  معرفة على  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  . إذن  $D = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$

2. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ،  $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2}$  ،  

$$= 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  :  $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$  إذن  $a = 2$  :  $b = 1$  :  $c = 1$  .  
 3. تعيين نهايات الدالة  $f$  عند حدود المجموعة  $D$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

( $f$ ) هي مجموعة دالتين  $f_1$  و  $f_2$  حيث  $f_1(x) = 2x + 1$  و  $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$  .

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} (2x^3 + x^2 + 1) = 1$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم :  $x > 0$

إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  أي  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  .

4. الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم :  $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3} = \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^3}$$

| $x$           | $-\infty$ | 0 | 1     | $+\infty$ |
|---------------|-----------|---|-------|-----------|
| $x-1$         | -         |   | - 0 + | +         |
| $x^2 + x + 1$ | +         |   | +     | +         |
| $x^3$         | -         |   | +     | +         |
| $f'(x)$       | +         |   | - 0 + | +         |

دراسة إشارة  $f'(x)$  على  $D$ .

من الجدول المقابل، ينتج أن الدالة  $f$

متزايدة على كل من المجالين

$]-\infty; 0[$  و  $]1; +\infty[$

و متناقصة على المجال  $]0; 1]$ .

| $x$     | $-\infty$ | 0         | 1     | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|-------|-----------|
| $f'(x)$ | -         |           | - 0 + | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ | 4     | $+\infty$ |

جدول تغيرات الدالة يكون كالآتي :

نلاحظ أن النقطة ذات الإحداثيين

$(1; 4)$  هي نقطة حدية صغرى

للمنحنى  $(\mathcal{C})$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

5. دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  إذن المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

يوازي محور الترتيب.

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم :  $f(x) - 2x - 1 = \frac{1}{x^2}$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (2x + 1)) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x + 1)) = 0$

إذن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 2x + 1$  مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

6. دراسة الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{C})$  و المستقيم المقارب المائل  $(\Delta)$ .

دراسة إشارة العبارة  $f(x) - (2x + 1)$  على  $D$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ،  $f(x) - (2x + 1) = \frac{1}{x^2}$

نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ،  $\frac{1}{x^2} > 0$

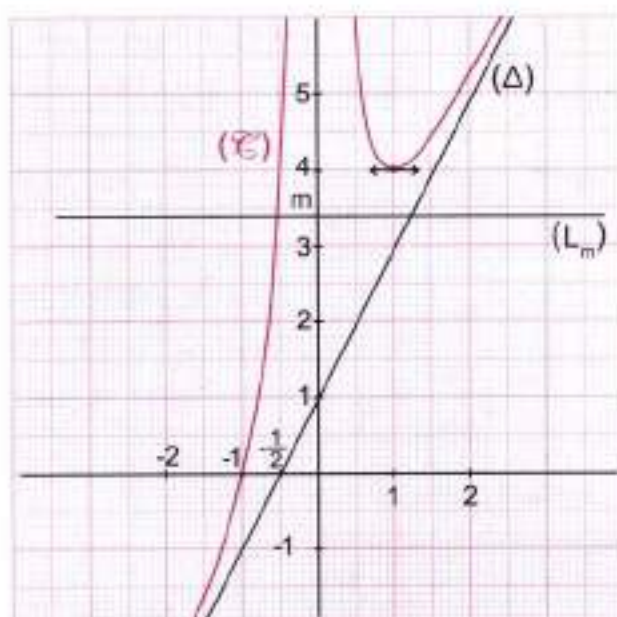
إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ،  $f(x) - (2x + 1) > 0$

ينتج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  فوق المستقيم المقارب المائل  $(\Delta)$ .

7.  $f(-1) = 0$ . نستنتج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الإحداثيين  $(-1; 0)$ .

## تمارين و حلول نموذجية

8. رسم المنحنى (E).



9. مناقشة عدد و إشارة حلول المعادلة  $2x^3 + (1-m)x^2 + 1 = 0$  في  $\mathbb{R}$  ببيانها حسب قيم العدد الحقيقي  $m$ .

المعادلة  $2x^3 + (1-m)x^2 + 1 = 0$  تكتب على الشكل  $\frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2} = m$  حيث  $x$  ينتمي إلى  $D$  أو أيضا  $f(x) = m$  حيث  $x$  ينتمي إلى  $D$ .

معادلة المنحنى (E) هي  $y = f(x)$ .

ليكن  $(L_m)$  المستقيم ذا المعادلة  $y = m$  : عدد حقيقي.

حلول المعادلة  $f(x) = m$  هي فواصل نقطة تقاطع (E) و  $(L_m)$ .

النتائج تلخص في الجدول الموالي :

| m       | $-\infty$                                          | 4 | $+\infty$                                                    |
|---------|----------------------------------------------------|---|--------------------------------------------------------------|
| النتائج | المعادلة تقبل حلا واحدا سالبا                      |   | المعادلة تقبل ثلاثة حلول :<br>حل سالب و حلان مختلفان موجبان. |
|         | المعادلة تقبل حلا سالبا و حلا مضاعفا موجبا و هو 1. |   |                                                              |



$$f: x \mapsto \frac{x^3 + x^2 + 3}{x} \quad \bullet 1$$

$$f: x \mapsto \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 2} \quad \bullet 2$$

$$f: x \mapsto \frac{3x^2 - 4x}{4(1 - x)} \quad \bullet 3$$

$$f: x \mapsto \frac{x^3 + 4x^2 + x - 2}{(x + 1)^2} \quad \bullet 4$$

$$f: x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 6}{2(x + 1)} \quad \bullet 5$$

$$f: x \mapsto 2x + 1 - \frac{2}{(1 - x)^2} \quad \bullet 6$$

$$f: x \mapsto x + 3\sqrt{x^2 - 1} \quad \bullet 7$$

$$f: x \mapsto (x - 1)\sqrt{2x} \quad \bullet 8$$

$$f: x \mapsto \sqrt{\frac{2 - x}{2 + x}} \quad \bullet 9$$

$$f: x \mapsto \frac{1}{4} - \left(\frac{2x + 1}{4}\right) \cos \pi x \quad \bullet 10$$

$$f: x \mapsto \sqrt{\cos 2x} \quad \bullet 11$$

$$f: x \mapsto \frac{1 + \cos 2x}{1 - \sin 2x} \quad \bullet 12$$

### الاستمرارية وقابلية الاشتقاق

4 نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = 1 - (x - 1)|x - 1|$$

• ادرس إستمرارية  $f$  عند العدد 1.

• ادرس قابلية اشتقاق  $f$  عند العدد 1.

5  $f$  هي دالة معرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} - \frac{1}{x}$$

• عين مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

• نعرف الدالة  $g$  كما يلي :

$$g(x) = f(x) \text{ إذا كان } x \neq 0 \text{ و } g(0) = 0$$

هل الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق عند 0 ؟

هل الدالة  $g$  مستمرة عند 0 ؟

### ابلية الاشتقاق - العدد المشتق

1 ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  عند العدد  $x_0$ . عين العدد المشتق لها عند  $x_0$  في كل حالة من الحالات التالية :

$$x_0 = 1 : f: x \mapsto -\frac{x^2}{2} + 3x - 1$$

$$x_0 = 5 : f: x \mapsto \frac{x + 2}{-x + 7}$$

$$x_0 = -2 : f: x \mapsto 3x^6 - 4x^3 + 21$$

$$x_0 = 0 : f: x \mapsto 2 - x + x \sin |x|$$

$$x_0 = \frac{\pi}{4} : f: x \mapsto \cos x$$

$$x_0 = 0 : f: x \mapsto (2x - 3)^2$$

$$x = 0 : f: x \mapsto x\sqrt{x}$$

$$x_0 = 0 : f: x \mapsto |x|$$

### معادلة المماس

2 عين معادلة المماس (أو نصف مماس) للمنحنى

مثل للدالة  $f$  عند النقطة  $A$  ذات الفاصلة  $x_0$  في كل حالة من الحالات التالية :

$$x_0 = 3 : f(x) = x^2 + x - 5$$

$$x < 1 : f(x) = \sqrt{1 - x}$$

$$f(1) = 0$$

$$x > 1 : f(x) = -\sqrt{x - 1}$$

$$x_0 = 1$$

$$x_0 = 2 : f(x) = |x^3 - 8|$$

$$x_0 = 0 : f(x) = \sqrt{x}$$

$$x_0 = 2 : f(x) = \sqrt{|x - 2|}$$

$$x_0 = 1 : f(x) = x^2 + 2|x - 1|$$

$$x_0 = -2 : f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$$

### الدوال المشتقة

3  $f$  دالة معرفة على مجموعة  $D$ .

عين المجموعة  $D$  والمجموعة  $D'$  التي تقبل عليها  $f$

لاشتقاق ثم عين الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$

في كل حالة من الحالات التالية :

مسائل

10)  $f$  دالة معرفة كما يلي :  $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$

(E) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنس

إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

2. أنجز جدول تغيرات الدالة  $f$ .

3. عين إحداثيي A نقطة تقاطع (E) مع مح

الفواصل. ما هي معادلة المماس عند A ؟

4. بين أن النقطة A مركز تناظر المنحنى (E)

5. ارسم المنحنى (E) و المماس عند A.

الوحدة 2 cm

11) أ)  $f$  دالة كثير الحدود معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$$

1. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

2. بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا واحدا

حيث  $1.6 < \alpha < 1.7$ .

ب)  $g$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$

كما يلي :  $g(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$ .

(E) المنحنى الممثل للدالة  $g$  في المستوي المنس

إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

الوحدة 4 cm

1. ادرس تغيرات الدالة  $g$  ( بإمكانك إستعمال

نتائج السؤال 1).

2. عين معادلة المماس ( $\Delta$ ) للمنحنى (E) عند

النقطة A فاصلتها 0.

3. ادرس الوضع النسبي للمنحنى (E) و المماس

( $\Delta$ ) في المجال  $]1; +\infty[$ . بين أن (E) يقطع

عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4. ارسم المنحنى (E)، المماس ( $\Delta$ ) و المماس

عند النقطة ذات الفاصلة 1.

إتجاه التغيرات

6) عين مجموعة تعريف الدالة  $f$  ثم أدرس

إتجاه تغيراتها على هذه المجموعة في كل حالة من

الحالات التالية :

$$f(x) = x^3(1-x)^3 \quad 1.$$

$$f(x) = x - 5\sqrt{x} \quad 2.$$

$$f(x) = \frac{3x^2 - x - 1}{x - 2} \quad 3.$$

$$f(x) = -x + 1 - \frac{4}{x^2} \quad 4.$$

$$f(x) = x + \sin x \quad 5.$$

$$f(x) = x - \tan x \quad 6.$$

$$f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 4x^3 \quad 7.$$

$$f(x) = \frac{2x-5}{x+1} \quad 8.$$

$$f(x) = \frac{x+1}{2x-5} \quad 9.$$

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 \quad 10.$$

الدوال المشتقة المتتابة

7)  $f$  دالة معرفة كما يلي :  $f(x) = \frac{1}{x-1}$

بين أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم،

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق  $n$  مرة عند كل عدد حقيقي

يختلف عن 1.

عين، بدلالة  $n$  : عبارة  $f^{(n)}(x)$

من أجل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{1\}$ .

8) عين الدوال المشتقة المتتابة للدوال  $f$  في

الحالات التالية :

$$f: x \mapsto x^5 - 2x^4 + x^2 - x + 1 \quad 1.$$

$$f: x \mapsto \frac{1}{2x-1} \quad 2.$$

$$f: x \mapsto \sin 2x \quad 3.$$

9)  $f$  دالة معرفة كما يلي :

$$f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$$

بين أن الدالة  $f$  تحقق المعادلة التفاضلية

$$y'' + 9y = 0$$

ب) . لتكن  $f$  الدالة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$$

• احسب  $f(1)$ . حلل  $f(x)$  إلى جداء عوامل.

• ادرس إشارة  $f(x)$  حسب قيم العدد الحقيقي  $x$ .

2. نريد دراسة الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 4}{x + 1}$$

كما يلي : ليكن  $(\mathcal{E}_f)$  المنحنى الممثل لها.

أ) . ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

ب) . بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$f(x) = ax^2 + bx + \frac{c}{x+1} ; \mathbb{R} - \{-1\}$$

حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

ج) . ادرس الأوضاع النسبية للمنحنيين  $(\mathcal{E}_f)$  و  $(\mathcal{E}_g)$ .

د) . ارسم بعناية المنحنيين  $(\mathcal{E}_f)$  و  $(\mathcal{E}_g)$

في نفس المعلم.

$$f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$$

• عين العددين  $a$  و  $b$  حتى يقبل المنحنى الممثل

دالة  $f$  مماسا عند النقطة  $O(0; 0)$  يوازي

مستقيم  $(D)$  ذا المعادلة  $y = 4x + 3$ .

• ادرس تغيرات الدالة  $f$  ثم لرسم المنحنى  $(\mathcal{E}_f)$

الممثل لها بعناية في معلم متعامد و متجانس

ناسب  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

13 حل كل معادلة من المعادلات التفاضلية التالية:

$$y'' = 0 \quad .6 \quad y' = 0$$

$$y'' = \frac{1}{2} \quad .7 \quad y' = -5$$

$$y'' = x - 2 \quad .8 \quad y' = \sqrt{2}x - 1$$

$$y'' = \frac{1}{2}x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad .9 \quad y' = \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$y'' = \sin \frac{\pi}{3}x \quad .10 \quad y' = x - \cos 2x$$

14 لتكن  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]a; +\infty[$

$$f(x) = \frac{1}{x-a}$$

• احسب  $f'''(x) : f''(x) : f'(x)$

• ضمن عبارة  $f^{(n)}(x)$  من أجل  $n$  عدد طبيعي

غير منعدم.

• رهن بالتراجع، صحة هذا التخمين.

• لتكن  $g$  الدالة المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

عين عددين حقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث من أجل كل عدد

من المجال  $]1; +\infty[$  :  $g(x) = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-1}$

احسب  $g^{(n)}(x)$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم.

15 المستوي منسوب إلى معلم متعامد

و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

أ) . ارسم المنحنى  $(\mathcal{E}_g)$  الممثل للدالة  $g$

$$g(x) = x^2 - x$$



أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard\_equation

### • تعريف دالة أصلية لدالة

ف دالة معرفة على مجال  $I$ . نسمي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $I$  كل دالة  $F$  معرفة و قابلة للاشتقاق على  $I$  حيث من أجل كل عدد  $x$  من  $I$  ،  $F'(x) = f(x)$ .

### • مبرهنة (وجود دالة أصلية)

كل دالة معرفة و مستمرة على مجال  $I$  تقبل على الأقل دالة أصلية على هذا المجال.

### • مبرهنة

إذا كانت  $f$  دالة معرفة على مجال  $I$  و  $F$  دالة أصلية لها على  $I$  فإن الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $I$  هي الدوال  $G$  المعرفة على  $I$  كما يلي :  
من أجل كل عدد  $x$  من  $I$  ،  $G(x) = F(x) + c$  حيث  $c$  عدد حقيقي.

### • مبرهنة

ف دالة معرفة و مستمرة على مجال  $I$  و  $F$  دالة أصلية لها على  $I$ .

إذا كان  $x_0 \in I$  و  $y_0 \in \mathbb{R}$  فإنه توجد دالة أصلية وحيدة  $G$  للدالة  $f$  حيث  $y_0 = G(x_0)$  و معرفة على  $I$  كما يلي : من أجل كل عدد  $x$  من  $I$  ،  $G(x) = F(x) + y_0 - F(x_0)$ .

**نتيجة :** إذا كانت  $f$  دالة معرفة على مجال  $I$  و  $F$  دالة أصلية لها على  $I$  فإن الدالة  $x \mapsto F(x) - F(x_0)$  المعرفة على  $I$  هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة  $f$  على  $I$  و التي تنعدم عند  $x_0$ .

### • دوال أصلية لدوال مأثوفة

| الدالة $f$ هي الدالة ...                                               | الدوال الأصلية للدالة $f$ هي الدوال $F$ ...                      | مجال تعريف $I$ للدالتين $f$ و $F$                                                                           |
|------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x \mapsto k$ حيث $k \in \mathbb{R}$                                   | $x \mapsto kx + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$                        | $I = \mathbb{R}$                                                                                            |
| $x \mapsto x^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$                      | $x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$     | إذا كان $n \geq 1$ فإن $I = \mathbb{R}$<br>إذا كان $n \leq -2$ فإن $I = ]-\infty; 0[$ أو $I = ]0; +\infty[$ |
| $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$                                         | $x \mapsto 2\sqrt{x} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$                 | $I = ]0; +\infty[$                                                                                          |
| $x \mapsto \cos x$                                                     | $x \mapsto \sin x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$                    | $I = \mathbb{R}$                                                                                            |
| $x \mapsto \sin x$                                                     | $x \mapsto -\cos x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$                   | $I = \mathbb{R}$                                                                                            |
| $x \mapsto \cos(ax + b)$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$ | $x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$  | $I = \mathbb{R}$                                                                                            |
| $x \mapsto \sin(ax + b)$ حيث $a \in \mathbb{R}^*$ و $b \in \mathbb{R}$ | $x \mapsto -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$ | $I = \mathbb{R}$                                                                                            |
| $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$                                         | $x \mapsto \tan x + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$                    | $I = ]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ حيث $k \in \mathbb{Z}$                                  |

## • استعمال دساتير دوال مشتقة

$u$  دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال  $I$  و  $c$  عدد حقيقي.

| ملاحظات                                                                                                                                  | الدوال الأصلية $F$ للدالة $f$<br>معرفة كما يلي ... | الدالة $f$ معرفة كما يلي ...                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| إذا كان $n > 0$ فإن $I = \mathbb{R}$<br>إذا كان $n < 0$ و $n \neq -1$ فإن $I = \mathbb{R}$<br>باستثناء الأعداد $x$ من $I$ حيث $u(x) = 0$ | $F(x) = \frac{1}{n+1} \cdot u(x)^{n+1} + c$        | $f(x) = u'(x) \cdot u(x)^n$<br>حيث $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$ |
| $I = \mathbb{R}$ باستثناء الأعداد $x$ من $I$<br>حيث $u(x) \leq 0$                                                                        | $F(x) = 2\sqrt{u(x)} + c$                          | $f(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$                               |
| $I$                                                                                                                                      | $F(x) = \sin u(x) + c$                             | $f(x) = [\cos u(x)] \cdot u'(x)$                                 |
| $I$                                                                                                                                      | $F(x) = -\cos u(x) + c$                            | $f(x) = [\sin u(x)] \cdot u'(x)$                                 |
| $v$ هي دالة قابلة للاشتقاق على المجال $J$<br>حيث $f(I) \subset J$                                                                        | $F(x) = (v \circ u)(x) + c$                        | $f(x) = (v' \circ u)(x) \cdot u'(x)$                             |

**ملاحظة:** يمكن لدالة أن تكون غير قابلة للاشتقاق على مجال و تقبل دوالا أصلية على هذا المجال.  
الدالة  $x \mapsto \sqrt{x}$  مستمرة على  $[0; +\infty[$  وقابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  لكنها تقبل على الأقل دالة أصلية على  $[0; +\infty[$  مثل الدالة  $x \mapsto \frac{2}{3} x \sqrt{x}$ .



1 تعيين دوال أصلية بسيطة

تمرين 1

$F(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$  : كما يلي  $R$  دالة معرفة على

و  $f(x) = 6x^2 - 2x + 3$  : كما يلي  $R$  دالة المعرفة على

1- بين أن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $R$ .

2- عين دالة أصلية أخرى  $G$  للدالة  $f$  على  $R$ .

حل

• الدالة  $F$  دالة كثير الحدود. إذن  $F$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $R$  ومن أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$F'(x) = 6x^2 - 2x + 3. \text{ نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي } x : F'(x) = f(x).$$

ينتج أن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $R$ . وبالتالي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $R$

هي الدوال  $F(x) + c$  حيث  $c \in R$ .

• لإيجاد دالة أصلية أخرى  $G$  للدالة  $f$  على  $R$ ، يكفي تغيير الحد الثابت في عبارة  $F(x)$ .

الدالة  $G$  المعرفة على  $R$  كما يلي :  $G(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $R$ .

تمرين 2

1- أوجد دالة أصلية لكل من الدالتين  $f$  و  $g$  المعرفتين على  $I$  أو  $J$  كما يلي :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 4 \text{ و } I = R : g(x) = \frac{1}{x^2} \text{ و } J = ]0; +\infty[.$$

2- أوجد كل الدوال الأصلية لكل دالة من الدالتين  $f$  و  $g$ .

حل

• الدالة  $F$  المعرفة على  $R$  كما يلي :  $F(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x$  قابلة للاشتقاق على  $R$

$$\text{و من أجل كل عدد حقيقي } x, F'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 4.$$

$$= f(x)$$

إذن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $R$ .

الدالة  $G$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي :  $G(x) = -\frac{1}{x}$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]0; +\infty[$ ،  $G'(x) = \frac{1}{x^2}$  إذن الدالة  $G$  هي دالة أصلية للدالة

على المجال  $]0; +\infty[$ .

• الدوال  $F(x) + c$  حيث  $c \in R$  هي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $R$ .

الدوال  $G(x) + c'$  حيث  $c' \in R$  هي الدوال الأصلية للدالة  $g$  على  $]0; +\infty[$ .

## 2 إيجاد الدالة الأصلية لدالة التي تأخذ قيمة $y_0$ عند العدد $x_0$

### تمرين

$f$  و  $g$  الدالتان المعرفتان على المجال  $I$  كما يلي :  $I = \mathbb{R}$  ;  $f(x) = x^2 - x$  ;  $I = ]-\infty; 0[$  ;  $g(x) = -\frac{1}{x^2}$

1- عين الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  والتي تأخذ القيمة 1 عند العدد 0.

2- عين الدالة الأصلية  $G$  للدالة  $g$  على  $] -\infty; 0[$  والتي تنعدم عند العدد -2 .

### حل

• الدوال  $H$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $H(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c$  :  $c \in \mathbb{R}$  هي الدوال الأصلية لـ  $f$ .

على  $\mathbb{R}$ . لدينا  $H(0) = 1$  أي  $H(0) = \frac{1}{3}(0)^3 - \frac{1}{2}(0)^2 + c = 1$  . إذن  $c = 1$ . هذه الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$ .

هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

• الدوال  $L$  المعرفة على  $] -\infty; 0[$  كما يلي :  $L(x) = \frac{1}{x} + \lambda$  :  $\lambda \in \mathbb{R}$  هي الدوال الأصلية

للدالة  $g$  على  $] -\infty; 0[$ . لدينا  $L(-2) = 0$  أي  $L(-2) = \frac{1}{-2} + \lambda = 0$  إذن  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

ينتج أن الدالة الأصلية للدالة  $g$  على المجال  $] -\infty; 0[$  والتي تنعدم عند -2 هي الدالة  $G$

المعرفة على المجال  $] -\infty; 0[$  كما يلي :  $G(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$

## 3 استعمال الدوال الأصلية لدوال مأثوفة

### تمرين 1

عين الدوال الأصلية لكل دالة من الدوال  $f$  على المجال  $I$  في الحالات التالية :

$$I = ]0; +\infty[ : f(x) = \frac{3}{x^2} - \cos x + 3 \quad (2) \quad I = \mathbb{R} : f(x) = x^6 + x^2 - 3x + 6 \quad (1)$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \cos 3x \quad (4) \quad I = ]0; +\infty[ : f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \sin x - 1 \quad (3)$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \quad (5)$$

### حل

1. الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  حيث  $f(x) = x^6 + x^2 - 3x + 6$  هي الدوال  $F$

المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $F(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + c$  :  $c \in \mathbb{R}$  حيث

2. الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $]0; +\infty[$  حيث  $f(x) = \frac{3}{x^2} - \cos x + 3$  هي الدوال  $F$  المعرفة

على  $]0; +\infty[$  كما يلي :  $F(x) = -\frac{3}{x} - \sin x + 3x + c$  :  $c \in \mathbb{R}$  حيث

3. الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $]0; +\infty[$  حيث  $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + \sin x - 1$  هي الدوال  $F$  المعرفة

على  $]0; +\infty[$  كما يلي :  $F(x) = -4\sqrt{x} - \cos x - x + c$  حيث  $c \in \mathbb{R}$ .

4. الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  حيث  $f(x) = \cos 3x$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$F(x) = \frac{1}{3} \sin 3x + c \quad \text{حيث } c \in \mathbb{R}$$

5. الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  حيث  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$\text{كما يلي : } F(x) = -\frac{1}{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + c \quad \text{حيث } c \in \mathbb{R}$$

- في كل حالة من الحالات التالية، تعرف على عبارة الدالة  $f$  ثم عين دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$ .
- (1)  $I = \mathbb{R} : f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$
- (2)  $I = \mathbb{R} : f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
- (3)  $I = \mathbb{R} : f(x) = (x-2)(x^2-4x+1)^3$
- (4)  $I = \mathbb{R} : f(x) = \cos x \cdot \sin^4 x$

حل

1. بوضع  $u(x) = x^2 + x + 1$ . لدينا الدالة  $u$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $u'(x) = 2x + 1$ . نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $u(x) \neq 0$  و  $f(x) = \frac{u'(x)}{u^2(x)}$ . إذن الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $F(x) = \frac{-1}{u(x)} + c$  حيث  $c \in \mathbb{R}$ . أي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $F(x) = \frac{-1}{x^2+x+1} + c$  حيث  $c \in \mathbb{R}$ .

2. بوضع  $u(x) = x^2 + 1$  و  $v(x) = \sqrt{x}$ . الدالة  $u$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $u'(x) = 2x$ . الدالة  $v$  قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]0; +\infty[$ ،  $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . لدينا  $(v \circ u)(x) = v[u(x)] = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$ . نلاحظ أن الدالة  $f$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) = u'(x) \times (v \circ u)(x) = (v \circ u)'(x)$ .

ينتج أن الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $v \circ u$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $(v \circ u)(x) = v[u(x)] + c = v(x^2 + 1) + c = \sqrt{x^2 + 1} + c$ .

أي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} + c$  حيث  $c \in \mathbb{R}$ .

**ملاحظة :** بوضع  $u(x) = x^2 + 1$ ؛ الدالة  $u$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد  $x$ ،  $u(x) > 0$ . لدينا أيضا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $u'(x) = 2x$ .

إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$  و بالتالي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $F(x) = \sqrt{u(x)} + c$  حيث  $c \in \mathbb{R}$ . أي : من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + c$  حيث  $c \in \mathbb{R}$ .



3. بوضع  $u(x) = x^2 - 4x + 1$ ، الدالة  $u$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد  $x$

$$u'(x) = 2x - 4. \text{ نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي } x : f(x) = \frac{1}{2} u'(x) \times u^3(x)$$

إذن الدوال الأصلية للدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = (x-2) \times (x^2 - 4x + 1)^3$  هي الدوال

$$F \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي : } F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} u^4(x) + c \text{ حيث } c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{أي : من أجل عدد حقيقي } x : F(x) = \frac{1}{8} (x^2 - 4x + 1)^4 + c \text{ حيث } c \in \mathbb{R}.$$

4. بوضع  $u(x) = \sin x$ ، الدالة  $u$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

$$\text{و من أجل كل عدد حقيقي } x : u'(x) = \cos x.$$

نلاحظ أن : من أجل كل عدد حقيقي  $x : f(x) = u'(x) \cdot u^4(x)$ . ينتج أن الدوال الأصلية للدالة  $f$

$$\text{المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي : } f(x) = \cos x \cdot \sin^4 x \text{ هي الدوال } F \text{ المعرفة على } \mathbb{R}$$

$$\text{كما يلي : } F(x) = \frac{1}{5} u^5(x) + c \text{ حيث } c \in \mathbb{R}.$$

إذن الدوال الأصلية للدالة  $f$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $F(x) = \frac{1}{5} \sin^5 x + c$  حيث  $c \in \mathbb{R}$ .

تمرين 1

- $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$  : كما يلي  $]1; +\infty[$  المجال
- بين أنه يوجد عدداً حقيقياً  $a$  و  $b$  حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]1; +\infty[$  :  $f(x) = a + \frac{b}{(x-1)^2}$
  - عين الدوال الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $]1; +\infty[$ .
  - حدد الدالة الأصلية  $G$  للدالة  $f$  التي تنعدم عند العدد 2.

حل

- الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]1; +\infty[$  و من أجل كل عدد  $x$  حيث  $x > 1$  :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

- نتج أن  $a = 1$  و  $b = -1$  . وبالتالي من أجل كل عدد  $x$  حيث  $x > 1$  :  $f(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$
- ملاحظة :** يمكن توحيد المقامات في العبارة  $a + \frac{b}{(x-1)^2}$  ثم مقارنة عبارتي  $f(x)$  .

- الدالة  $f$  معرفة على  $]1; +\infty[$  و قابلة للاشتقاق على  $]1; +\infty[$  . نضع  $u(x) = x - 1$

- الدالة  $u$  معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال  $]1; +\infty[$  و من أجل كل عدد  $x$  حيث  $x > 1$  :  $u'(x) = 1$

لدينا من أجل كل عدد  $x$  ،  $f(x) = 1 - \frac{u'(x)}{[u(x)]^2}$

إذن من أجل كل عدد  $x$  حيث  $x > 1$  ،  $f(x) = \left[ x + \frac{1}{u(x)} \right]'$

- نتج أن الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $]1; +\infty[$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $]1; +\infty[$  كما يلي :

حيث  $c \in \mathbb{R}$   $F(x) = x + \frac{1}{x-1} + c$

- تعيين الدالة الأصلية للدالة  $f$  حيث  $F(2) = 0$  . لدينا  $F(2) = 0$  يعني  $2 + \frac{1}{2-1} + c = 0$

أي  $3 + c = 0$  إذن  $c = -3$  . نتج أن الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  حيث  $F(2) = 0$

هي الدوال  $F$  المعرفة على  $]1; +\infty[$  كما يلي  $F(x) = x + \frac{1}{x-1} - 3$

## تمرين 2

أوجد الدوال الأصلية على  $\mathbb{R}$  لكل من الدالتين  $f$  و  $g$  المعرفتين كما يلي :

$$g(x) = \sin^4 x \quad ; \quad f(x) = \cos^4 x$$

**حل**

• تعيين العبارة الخطية لكل من  $\sin^4 x$  و  $\cos^4 x$ .

نضع  $\cos x + i \sin x = e^{ix}$  و  $\cos x - i \sin x = e^{-ix}$  (ترميز أولير)

$$\text{إذن} \quad \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \quad \text{و} \quad \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\text{ينتج أن} \quad \cos^4 x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 (e^{ix} + e^{-ix})^4 \quad \text{و} \quad \sin^4 x = \left(\frac{1}{2i}\right)^4 (e^{ix} - e^{-ix})^4$$

$$\text{لدينا} \quad (e^{ix} + e^{-ix})^4 = e^{i4x} + 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{i2x}e^{-i2x} + 4e^{ix}e^{-i3x} + e^{-i4x}$$

$$= (e^{i4x} + e^{-i4x}) + 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6$$

$$= 2 \cos 4x + 8 \cos 2x + 6$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{16} (2 \cos 4x + 8 \cos 2x + 6) \quad \text{و بالتالي}$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8} \quad \text{أي أن}$$

$$\text{لدينا أيضا} \quad (e^{ix} - e^{-ix})^4 = e^{i4x} - 4e^{i3x}e^{-ix} + 6e^{i2x}e^{-i2x} - 4e^{ix}e^{-i3x} + e^{-i4x}$$

$$= (e^{i4x} + e^{-i4x}) - 4(e^{i2x} + e^{-i2x}) + 6$$

$$= 2 \cos 4x - 8 \cos 2x + 6$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{16} (2 \cos 4x - 8 \cos 2x + 6) \quad \text{و بالتالي}$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8} \quad \text{أي أن}$$

إذن الدالتان  $f$  و  $g$  معرفتان كما يلي :

$$g(x) = \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{3}{8}$$

ينتج أن الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$F(x) = \frac{1}{32} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x + c \quad \text{حيث } c \in \mathbb{R}$$

الدوال الأصلية للدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $G$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$G(x) = \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{8}x + c' \quad \text{حيث } c' \in \mathbb{R}$$



استعمال جدول الدوال المشتقة

4 عين الدوال الأصلية لكل دالة  $f$  من الدوال التالية على المجال  $I$ .

1.  $I = \mathbb{R} : f(x) = x^3 - 2x + 1$

2.  $I = ]0; +\infty[ : f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$

3.  $I = \mathbb{R} : f(x) = \sin x - 2\cos x$

4.  $I = ]-\infty; 0[ : f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$

5.  $I = \mathbb{R} : f(x) = \cos\left(\frac{x-\pi}{4}\right)$

6.  $I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[ : f(x) = 1 - \frac{1}{\cos x^2}$

7.  $I = \mathbb{R} : f(x) = (x-3)^4$

8.  $I = \mathbb{R} : f(x) = \sin x \cos^2 x$

9.  $I = \mathbb{R} : f(x) = 4x(x^2 + 4)^2$

10.  $I = ]0; +\infty[ : f(x) = \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^4$

11.  $I = ]0; +\infty[ : f(x) = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x}}$

12.  $I = ]3; +\infty[ : f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$

13.  $I = ]0; \frac{\pi}{2}[ : f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

14.  $I = ]0; \frac{\pi}{2}[ : f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

15.  $I = ]-1; +\infty[ : f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

16.  $I = \mathbb{R} : f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{3 + \sin x}}$

17.  $I = ]-1; 1[ : f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

18.  $I = \mathbb{R} : f(x) = x \cos x + \sin x$

19.  $I = ]-1; +\infty[ : f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

20.  $I = \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

عموميات على الدوال الأصلية

1 في كل حالة من الحالات التالية، اثبت أن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$ .

1.  $f(x) = 3x^2 - 1$

$I = \mathbb{R} : F(x) = (x-2)(x^2 + 2x + 3)$

2.  $f(x) = \sqrt{x+1}$

$I = ]-1; +\infty[ : F(x) = \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}$

3.  $f(x) = 2\left(x - \frac{1}{x^3}\right)$

$I = ]0; +\infty[ : F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

4.  $f(x) = \cos x - x \sin x$

$I = \mathbb{R} : F(x) = x \cos x$

مجموعة الدوال الأصلية - الشروط الأولية

2  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  
 $f(x) = 2 \sin 2x$ . عين، من بين الدوال التالية، دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

$G : x \mapsto \sin 2x : F : x \mapsto 2 \sin^2 x$

$L : x \mapsto 7 - \cos 2x : H : x \mapsto 1 + \cos^2 x$

3 أوجد الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على  $I$  حيث  $f(x_0) = y_0$  في الحالات التالية :

1.  $I = \mathbb{R} : f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$   
 $y_0 = 0 : x_0 = 1$

2.  $I = \mathbb{R} : f(x) = -2 \sin 2x$   
 $y_0 = 1 : x_0 = \frac{\pi}{4}$

3.  $I = \mathbb{R} : f(x) = \cos 3x$   
 $y_0 = 0 : x_0 = \frac{\pi}{2}$

4.  $I = ]0; +\infty[ : f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$   
 $y_0 = 1 : x_0 = 1$

$$I = ]0; +\infty[ : f(x) = \frac{-3}{x^3} + \cos x \quad .5$$

$$I = ]0; +\infty[ : f(x) = \frac{6}{\sqrt{x}} - x - 2 \quad .6$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \sin 2x + \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \quad .7$$

### مسائل

**9**  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{4 + \sin x}} \quad \text{كما يلي :}$$

1. عين الدالة الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

و التي تأخذ القيمة 4 عند العدد 0.

2. عين كل الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

**10**  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}_+^*$

$$f(x) = \frac{2x^3 + 27}{2x^2} \quad \text{كما يلي :}$$

1. بين أنه يوجد عددا حقيقيان  $a$  و  $b$  حيث

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $\mathbb{R}_+^*$ .

$$f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$$

2. عين كل الدوال الأصلية للدالة  $f$

على المجال  $]0; +\infty[$ .

3. عين الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  التي تأخذ

القيمة 1 عند العدد 1.

**11**  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$f(x) = 3x^2(x^2 + 1) + 2x(x^3 + 1) \quad \text{كما يلي :}$$

1. عين الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

2. ما هي الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

التي تنعدم عند العدد 0؟

**12** عين الدوال الأصلية للدالتين  $f$  و  $g$

المعرفتين على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

$$g(x) = \sin^3 x \quad \text{و} \quad f(x) = \cos^3 x$$

### تعيين دوال أصلية

**5** عين الدوال الأصلية لكل دالة  $f$  من الدوال

التالية المعرفة على المجال  $I$ .

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \cos x \sin^3 x \quad .1$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \sin x \cos^2 x \quad .2$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \cos x \sin^2 x \quad .3$$

$$I = ]-\infty; -5[ : f(x) = \frac{5}{(x+5)^5} \quad .4$$

$$I = ]0; +\infty[ : f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{x} \quad .5$$

$$I = ]-1; +\infty[ : f(x) = \frac{x^2}{(1+x^3)^2} \quad .6$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 1}} \quad .7$$

**6**  $f$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x^2 - 1)^2} \quad \text{كما يلي :}$$

و  $F$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$

$$F(x) = \frac{-x-2}{x^2-1} \quad \text{كما يلي :}$$

برهن أن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على

المجال  $]1; +\infty[$ .

**7**  $f$  و  $F$  دالتان معرفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = -3x^2 + 4x + 1$$

$$F(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 1$$

1. برهن أن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

2. عين كل الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

**8** عين الدوال الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$

في كل حالة من الحالات التالية :

$$I = \mathbb{R} : f(x) = -x + 3 \quad .1$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = x^2 + x \quad .2$$

$$I = \mathbb{R} : f(x) = 2x^3 - x + 1 \quad .3$$

$$I = ]0; +\infty[ : f(x) = \frac{2}{x^3} \quad .4$$

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard\_equation



### 1. تعريف الدالة الأسية

الدالة الأسية، و يرمز لها  $\exp$ ، هي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية  $y' = y$  الذي يحقق  $\exp(0) = 1$   
الدالة الأسية معرفة على  $\mathbb{R}$  حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $\exp'(x) = \exp(x)$  و  $\exp(0) = 1$

### 2. خواص

- خاصية 1: الدالة الأسية موجبة تماما على  $\mathbb{R}$ . (من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $\exp(x) > 0$ )
- خاصية 2: الدالة الأسية متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ . (من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $\exp'(x) > 0$ )
- خاصية 3: الدالة الأسية مستمرة على  $\mathbb{R}$ . (الدالة  $\exp$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  كونها حل للمعادلة التفاضلية  $y' = y$ ).

### 3. مبرهنة

من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  :  $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

### 4. نتائج

- من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  :  $\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$
- من أجل كل عدد حقيقي  $x$  و من أجل كل عدد صحيح  $n$  :  $[\exp(x)]^n = \exp(nx)$ .

### 5. الترميز

نضع من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $\exp(x) = e^x$   
إذن الدالة  $\exp$  تكون معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $\exp(x) = e^x$ .

### 6. استعمال الترميز

- باستعمال الترميز  $e^x$ ، نكتب :  $e^0 = 1$  و  $e^1 = e$  (  $e$  هو عدد أولر (Euler) حيث  $e = 2,718 \dots$  )
- باستعمال الترميز  $e^x$ ، نكتب أيضا:
- من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  :  $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  :  $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- من أجل كل عدد حقيقي  $x$  و من أجل كل عدد صحيح  $n$  :  $(e^x)^n = e^{nx}$

### 7. دراسة الدالة $\exp$

- الدالة  $\exp$  معرفة على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $\exp(x) = e^x$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .
- الدالة  $\exp$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $(e^x)' = e^x$ .
- الدالة  $\exp$  موجبة تماما على  $\mathbb{R}$  ( أي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $e^x > 0$  ).

الدالة  $\exp$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  (من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $(e^x)' > 0$ ).

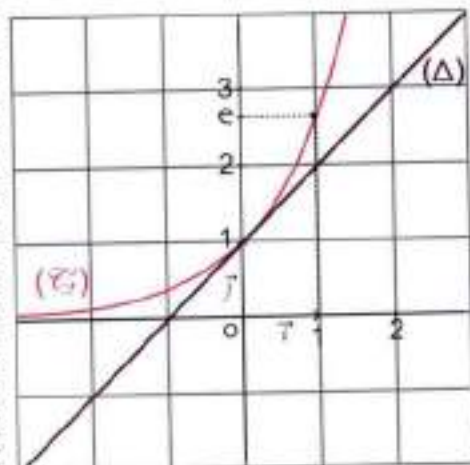
الدالة  $\exp$  مستمرة على  $\mathbb{R}$ .

لأنها قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

جدول التغيرات الدالة  $\exp$  يكون كما يلي :

التمثيل البياني

| $x$        | $-\infty$ | $+\infty$ |
|------------|-----------|-----------|
| $\exp'(x)$ |           | +         |
| $\exp(x)$  | 0         | $+\infty$ |



ليكن  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة  $\exp$  في المستوي

النسب إلى معلم متعامد و متجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .

معادلة المماس  $(\Delta)$  للمنحنى  $(C)$  عند النقطة

التي فاصلتها 0 هي :  $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0)$

لدينا  $\exp(0) = e^0 = 1$  و  $\exp'(0) = e^0 = 1$

إذن  $(\Delta) : y = x + 1$

محور الفواصل هو مستقيم مقارب للمنحنى  $(C)$  بجوار  $-\infty$ .

المنحنى  $(C)$  يقبل فرع قطع مكافئ في اتجاه محور الترتيب بجوار  $+\infty$ .

## 8. اشتقاق الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$

إذا كانت الدالة  $x \mapsto u(x)$  قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  فإن الدالة  $x \mapsto e^{u(x)}$

قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $[e^{u(x)}]' = u'(x) e^{u(x)}$ .

## 9. النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

## 10. خاصيتان

من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $x'$  :  $e^x = e^{x'}$  إذا وفقط إذا كان  $x = x'$ .

من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $x'$  :  $e^x < e^{x'}$  إذا وفقط إذا كان  $x < x'$ .

**ملاحظة :** يسمح تطبيق الخاصيتين السابقتين بحل معادلات و متراجحات في  $\mathbb{R}$ .

## 11. المعادلة التفاضلية $y' = y$

حلول المعادلة التفاضلية  $y' = y$  هي الدوال  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$

كما يلي :  $f(x) = k e^x$  حيث  $k$  عدد حقيقي ثابت.

### تمرين 1

1. احسب العدد  $\exp[(0,5)]^2$  بدلالة  $\exp(1)$ . استنتج قيمة  $\exp(0,5)$ .
2. عبر بدلالة  $\exp(1)$  عن الأعداد التالية :  $\exp(-2)$  :  $\exp(2 - \sqrt{2}) \times \exp(1 + \sqrt{2})$  :  $\frac{\exp(3) \times \exp(6)}{[\exp(4)]^2}$  :  $[\exp(2)]^3$  :  $\frac{\exp(0,5 + x)}{\exp(1 + x)}$

### حل

1. حساب العدد  $[\exp(0,5)]^2$  بدلالة  $\exp(1)$ .  
لدينا  $[\exp(0,5)]^2 = \exp(0,5) \times \exp(0,5)$   
 $= \exp(0,5 + 0,5) = \exp(1)$   
إذن  $[\exp(0,5)]^2 = \exp(1)$   
استنتج قيمة  $\exp(0,5)$ .  
لدينا  $[\exp(0,5)]^2 = \exp(1)$  و  $\exp(1) > 0$  إذن  $\exp(0,5) = \sqrt{\exp(1)}$ .
2. التعبير عن أعداد بدلالة  $\exp(1)$ .  
لدينا  $\exp(-2) = \exp(0 - 2)$   
 $= \frac{\exp(0)}{\exp(2)} = \frac{1}{\exp(2)}$   
و نعلم أن  $\exp(2) = \exp(2 \times 1)$   
 $= [\exp(1)]^2$   
إذن  $\exp(-2) = \frac{1}{[\exp(1)]^2}$  أو أيضا  $\exp(-2) = [\exp(1)]^{-2}$   
لدينا  $\exp(2 - \sqrt{2}) \times \exp(1 + \sqrt{2}) = \exp(2 - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2})$   
 $= \exp(3)$   
 $= [\exp(1)]^3$   
إذن  $\exp(2 - \sqrt{2}) \times \exp(1 + \sqrt{2}) = [\exp(1)]^3$   
لدينا  $\frac{\exp(0,5 + x)}{\exp(1 + x)} = \exp(0,5 + x - 1 - x)$   
 $= \exp(0,5 - 1)$   
 $= \exp(-0,5)$   
 $= \frac{1}{\exp(0,5)} = \frac{1}{\sqrt{\exp(1)}}$   
إذن  $\frac{\exp(0,5 + x)}{\exp(1 + x)} = \frac{1}{\sqrt{\exp(1)}}$



$$[\exp(2)]^3 = [(\exp(1))^2]^3 \quad \text{لدينا}$$

$$= [\exp(1)]^6$$

$$[\exp(2)]^3 = [(\exp(1))^6] \quad \text{إذن}$$

$$\frac{\exp(3) \times \exp(6)}{[\exp(4)]^2} = \frac{\exp(3+6)}{\exp(2 \times 4)} = \frac{\exp(9)}{\exp(8)} \quad \text{لدينا}$$

$$= \exp(9-8) = \exp(1) \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{\exp(3) \times \exp(6)}{[\exp(4)]^2} = \exp(1) \quad \text{إذن}$$

## 2 استعمال الترميز $e^x$

### تقريب 2

بسط العبارات التالية :

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 : \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 + 3e^{2x}(-2e^{-x+1}) : \frac{3\sqrt{e}}{e^3 \times e^{-1}} + \frac{2e^2 \times e}{\sqrt{e}}$$

$$\left(\frac{e^{-x+1}}{e^x - e^{-x}}\right) \times \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}\right) + \left(\frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2}\right) \left(\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2}\right) : e^{-10x} \times (e^{-x+1})^2 \times (e^{3x})^3$$

حل

$$\frac{2e^2 \times e}{\sqrt{e}} = \frac{2e^{2+1}}{e^{\frac{1}{2}}} = 2e^3 \times e^{-\frac{1}{2}} = 2e^{3-\frac{1}{2}} = 2e^{\frac{5}{2}} \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{2e^2 \times e}{\sqrt{e}} = 2e^{\frac{5}{2}} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{3\sqrt{e}}{e^3 \times e^{-1}} = \frac{3e^{\frac{1}{2}}}{e^{3-1}} = \frac{3e^{\frac{1}{2}}}{e^2} = 3e^{\frac{1}{2}-2} = 3e^{-\frac{3}{2}} \quad \text{لدينا}$$

$$= 3e^{\frac{1}{2}-2} = 3e^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{e^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{3\sqrt{e}}{e^3 \times e^{-1}} = 3e^{-\frac{3}{2}} \quad \text{إذن}$$

$$3e^{2x}(-2e^{-x+1}) = 3(-2)e^{2x} \times e^{-x+1} = -6e^{2x-x+1} = -6e^{x+1} \quad \text{لدينا}$$

$$3e^{2x}(-2e^{-x+1}) = -6e^{x+1} \quad \text{إذن}$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^x)^2 + 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} \quad \text{لدينا}$$

$$= \frac{e^{2x} + 2e^{x-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2e^0 + \frac{1}{e^{2x}}}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + \frac{1}{e^{2x}}}{4}$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + \frac{1}{e^{2x}}}{4} \quad \text{إذن}$$

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{(e^x)^2 - 2e^x e^{-x} + (e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} - 2 + \frac{1}{e^{2x}}}{4} \quad \text{لدينا}$$

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} - 2 + \frac{1}{e^{2x}}}{4} \quad \text{إذن}$$

$$e^{-10x} \times (e^{-x+1})^2 \times (e^{3x})^3 = e^{-10x} \times e^{2(-x+1)} \times e^{3(3x)} = e^{-10x} \times e^{-2x+2} \times e^{9x} \\ = e^{-10x-2x+2+9x} = e^{-3x+2}$$

$$e^{-10x} \times (e^{-x+1})^2 \times (e^{3x})^3 = e^{-3x+2} \quad \text{إذن}$$

$$\left(\frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2}\right) \left(\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2}\right) = \frac{(e^{4x})^2 - (e^{-4x})^2}{4} = \frac{e^{2(4x)} - e^{2(-4x)}}{4} = \frac{e^{8x} - e^{-8x}}{4} = \frac{e^{8x} - \frac{1}{e^{8x}}}{4} \quad \text{لدينا}$$

$$\left(\frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2}\right) \left(\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2}\right) = \frac{e^{8x} - \frac{1}{e^{8x}}}{4} \quad \text{إذن}$$

$$\left(\frac{e^{-x+1}}{e^x - e^{-x}}\right) \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}\right) = \frac{e^{-x} \times e(e^x - 1)(e^x + 1)}{(e^x + \frac{1}{e^x})(e^x + 1)}$$

$$= \frac{e^{-x} \times e \times (e^x - 1)}{\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x}\right)} = \frac{e^{-x} \times e \times (e^x - 1) \times e^x}{(e^x - 1)(e^x + 1)}$$

$$= \frac{e^{-x} \times e^x \times e}{e^x + 1} = \frac{e^{-x+x} \times e}{e^x + 1} = \frac{e^0 \times e}{e^x + 1} = \frac{e}{e^x + 1}$$

$$\left(\frac{e^{-x+1}}{e^x - e^{-x}}\right) \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}\right) = \frac{e}{e^x + 1} \quad \text{إذن}$$

### 3 حساب نهايات

#### تقريب 1

احسب النهاية عند  $-\infty$  للدالة  $f$  في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = (2x - 3)e^x \quad .2 \quad f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x - 3} \quad .1$$

$$f(x) = \frac{e^{x+1} + \sqrt{e}}{1 - e^x} \quad .4 \quad f(x) = 3e^{2x} - e^x + 4 \quad .3$$

حل

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2e^x + 1}{e^x - 3}\right) \quad \text{لدينا} \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 3) = -3 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x + 1) = 1 \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{نعلم أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{3} \quad \text{أي} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2e^x + 1}{e^x - 3}\right) = -\frac{1}{3} \quad \text{وبالتالي}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^x = 3 \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x e^x = 2 \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \text{بما أن} \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{وبالتالي} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 3) e^x = 0 \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^{2x} - e^x + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3e^{2x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^x + 4) \quad \text{لدينا} \quad .3$$

$$= 0 + 4 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4 \quad \text{وبالتالي} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^{2x} - e^x + 4) = 4 \quad \text{إذن}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{x+1} + \sqrt{e}}{1 - e^x} \right) && \text{لدينا 4.} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^x) &= 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} (e^x \times e) = 0 && \text{لدينا} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{x+1} + \sqrt{e}}{1 - e^x} \right) &= \frac{\sqrt{e}}{1} = \sqrt{e} && \text{إذن} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \sqrt{e} && \text{وبالتالي} \end{aligned}$$

## تمرين 2

احسب النهاية عند  $+\infty$  للدالة  $f$  في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x \quad \cdot 2 \quad f(x) = e^{2x} - x^2 \quad \cdot 1$$

$$f(x) = e^{3x+1} - 3x \quad \cdot 4 \quad f(x) = (3x^2 - 1)e^x \quad \cdot 3$$

## حل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( \frac{e^{2x}}{x^2} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[ \left( \frac{e^x}{x} \right)^2 - 1 \right] \quad \text{لدينا 1.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{e^x}{x} \right)^2 - 1 \right] = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{وبالتالي} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[ \left( \frac{e^x}{x} \right)^2 - 1 \right] = +\infty \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 2e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^x - 2) \quad \text{لدينا 2.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 2) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 2e^x) = +\infty \quad \text{وبالتالي} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^x - 2) = +\infty \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ينتج أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 1)e^x = +\infty \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 1) = +\infty \quad \text{لدينا 3.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{وبالتالي}$$

$$e^{3x+1} - 3x = e^{3x} \times e - 3x = 3x \left( e \frac{e^{3x}}{3x} - 1 \right) \quad \text{لدينا 4.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e \frac{e^{3x}}{3x} - 1 \right) = +\infty \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{3x+1} - 3x) = +\infty \quad \text{وبالتالي} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x \left( e \frac{e^{3x}}{3x} - 1 \right) = +\infty \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ينتج أن}$$



4 تعيين دوال مشتقة

تمرين

عين المجموعة التي تقبل عليها الدالة  $f$  الإشتقاق ثم عين الدالة المشتقة  $f'$  في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = xe^x + x^2 \quad .1 \quad f(x) = \frac{e^x + 1}{x} \quad .2$$

$$f(x) = (2x - 3)e^{3x-1} \quad .3 \quad f(x) = \frac{e^{2x}}{2x-1} \quad .4$$

حل

$$f(x) = xe^x + x^2 \quad .1$$

الدالة  $f$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = e^x + xe^x + 2x \quad : \quad x \text{ من أجل كل عدد حقيقي}$$

$$= (x+1)e^x + 2x$$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = (x+1)e^x + 2x$

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{x} \quad .2$$

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{0\}$  وقابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$

$$f'(x) = \frac{e^x(x) - (e^x + 1)}{x^2} \quad : \quad x \text{ غير منعدم}$$

$$= \frac{(x-1)e^x - 1}{x^2}$$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم :  $f'(x) = \frac{(x-1)e^x - 1}{x^2}$

$$f(x) = (2x - 3)e^{3x-1} \quad .3$$

الدالة  $f$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = 2e^{3x-1} + (2x-3) \times 3e^{3x-1} \quad : \quad x \text{ من أجل كل عدد حقيقي}$$

$$= (2 + 6x - 9)e^{3x-1} = (6x - 7)e^{3x-1}$$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = (6x - 7)e^{3x-1}$

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{2x-1} \quad .4$$

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$  وقابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $[\frac{1}{2}; +\infty[$  و  $]-\infty; \frac{1}{2}[$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(2x-1) - 2e^{2x}}{(2x-1)^2} \quad : \quad \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4(x-1)e^{2x}}{(2x-1)^2}$$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن  $\frac{1}{2}$  :  $f'(x) = \frac{4(x-1)e^{2x}}{(2x-1)^2}$

## تمرين 1

حل في  $R$  كل معادلة من المعادلات التالية :

$$e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0 \quad ; \quad 3e^{2x} - e^x - 1 = 0 \quad ; \quad e^{x^2} = e \quad ; \quad e^{2x} - e^x = 0 \quad ; \quad e^{3x} = 1$$

حل

1. حل المعادلة  $e^{3x} = 1$

لدينا  $e^{3x} = 1$  يعني  $e^{3x} = e^0$  أي  $3x = 0$

وبالتالي  $x = 0$ . ينتج أن المعادلة  $e^{3x} = 1$  تقبل حلا واحدا في  $R$  وهو 0.

2. حل المعادلة  $e^{2x} - e^x = 0$

لدينا  $e^{2x} - e^x = 0$  يعني  $e^{2x} = e^x$  أي  $2x = x$  وبالتالي  $x = 0$ .

ينتج أن المعادلة  $e^{2x} - e^x = 0$  تقبل حلا واحدا في  $R$  وهو 0.

3. حل المعادلة  $e^{x^2} = e$

لدينا  $e^{x^2} = e$  يعني  $x^2 = 1$  أي  $(x-1)(x+1) = 0$ . وبالتالي  $x = 1$  و  $x = -1$ .

ينتج أن المعادلة  $e^{x^2} = e$  تقبل حلين مختلفين في  $R$  هما 1 و -1.

4. حل المعادلة  $3e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$  ... (1) نضع  $e^x = x$

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 = 0 \\ e^x = x \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} 3e^{2x} - 2e^x - 1 = 0 \\ e^x = x \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} (3x+1)(x-1) = 0 \\ e^x = x \end{cases}$$

إذن ( $x = 1$  أو  $x = -\frac{1}{3}$ ) و  $e^x = x$ . ينتج أن  $e^x = 1$  أو  $e^x = -\frac{1}{3}$ .

لدينا  $e^x = 1$  إذن  $x = 0$ .

المعادلة  $e^x = -\frac{1}{3}$  لا تقبل حلا في  $R$  (لأن من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $e^x > 0$ )

وبالتالي  $3e^{2x} - 2e^x - 1 = 0$  تقبل حلا واحدا في  $R$  وهو 0.

5. حل المعادلة  $e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0$

لدينا  $e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0$  يعني  $e^{4+x^2} = e^{-4x}$  أي  $4 + x^2 = -4x$

أي  $x^2 + 4x + 4 = 0$  أي  $(x+2)^2 = 0$  إذن  $x = -2$ .

ينتج أن المعادلة  $e^{4+x^2} - e^{-4x} = 0$  تقبل حلا واحدا في  $R$  وهو -2.

## تمرين 2

حل في  $\mathbb{R}$  كل متراجحة من المتراجحات التالية :

$$e^{x^2} e^x < (e^2)^3 \quad ; \quad e^{1+x^2} \leq e^{2x} \quad ; \quad e^{-2x} \geq 1$$

حل

1. حل المتراجحة  $e^{-2x} \geq 1$  في  $\mathbb{R}$ .

لدينا  $e^{-2x} \geq 1$  يعني  $e^{-2x} \geq e^0$  أي  $-2x \geq 0$  إذن  $x \leq 0$

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة  $e^{-2x} \geq 1$  هي  $]-\infty; 0]$ .

2. حل المتراجحة  $e^{1+x^2} \leq e^{2x}$  في  $\mathbb{R}$ .

لدينا  $e^{1+x^2} \leq e^{2x}$  يعني  $1+x^2 \leq 2x$  أي  $x^2 - 2x + 1 \leq 0$  أي  $(x-1)^2 \leq 0$

إذن  $x = 1$ .

إذن المتراجحة  $e^{1+x^2} \leq e^{2x}$  تقبل حلا واحدا في  $\mathbb{R}$  هو 1.

3. حل المتراجحة  $e^{x^2} e^x < (e^2)^3$  في  $\mathbb{R}$ .

لدينا  $e^{x^2} e^x < (e^2)^3$  يعني  $e^{x^2+x} < e^6$  أي  $x^2 + x < 6$  أي  $x^2 + x - 6 < 0$ .

لدينا  $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

إذن  $x^2 + x - 6 < 0$  يعني  $(x-2)(x+3) < 0$

و بالتالي  $x \in ]-3; 2[$

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة  $e^{x^2} e^x < (e^2)^3$  هي  $]-3; 2[$ .



- $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = x - 2 - e^{-x}$
- (E) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
1. احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
  2. استنتج أن المنحنى (E) يقبل مستقيما مقاربا  $(\Delta)$  بجوار  $+\infty$ .
  - حدد الوضع النسبي للمنحنى (E) و المستقيم  $(\Delta)$ .
  3. اثبت أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) = e^{-x}(xe^x - 1) - 2$
  - استنتج  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .
  - ادرس سلوك المنحنى (E) الفروع اللانهائية للمنحنى (E) بجوار  $-\infty$ .
  4. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .
  5. اثبت أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x_0$  حيث  $2 < x_0 < 3$ .
  6. ارسم المنحنى (E).
  7. احسب  $A(\lambda)$  مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى (E) و المستقيم  $(\Delta)$  و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x = \lambda$  و  $x = 3$  :  $\lambda > 3$ .
  - ما هي نهاية  $A(\lambda)$  لما يؤول  $\lambda$  إلى  $+\infty$  ؟

حل

1. حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$ . لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty$ . إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
2. استنتج أن المنحنى (E) يقبل مستقيما مقاربا  $(\Delta)$ .
- لدينا  $f(x) = ax + b + \phi(x)$  حيث  $a = 1$ ,  $b = -2$ , و  $\phi(x) = e^{-x}$ .
- بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = 0$  فإن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x - 2$  هو المستقيم المقارب للمنحنى (E) بجوار  $+\infty$ .
3. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $e^{-x}(xe^x - 1) - 2 = xe^{-x}e^x - e^{-x} - 2 = x - 2 - e^{-x} = f(x)$
- إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) = e^{-x}(xe^x - 1) - 2$
- لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x}(xe^x - 1) - 2 = -\infty$
- ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
- دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى (E).

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{e^{-x}}{x}\right)$

## تمارين و حلول نموذجية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \text{إذن}$$

ينتج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل فرع قطع مكافئ بجوار  $-\infty$ .

4. دراسة تغيرات الدالة  $f$ .

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = 1 + e^{-x}$ .

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $e^{-x} > 0$ .

إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) > 0$ .

ينتج أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ |           | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

5. إثبات أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $x_0$  حيث  $2 < x_0 < 3$ .

الدالة  $f$  معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $[2; 3]$ .

لدينا  $f(2) = -\frac{1}{e^2}$  : أي  $f(2) < 0$

و  $f(3) = 1 - \frac{1}{e^3}$  : أي  $f(3) > 0$

وبالتالي  $f(2) \cdot f(3) < 0$

إذن المعادلة  $f(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا  $x_0$  حيث  $2 < x_0 < 3$ .

6. رسم المنحنى  $(\mathcal{C})$ .

7. حساب المساحة  $A(\lambda)$ .

لدينا  $A(\lambda) = \int_3^\lambda [(x-2) - f(x)] dx$

$$= \int_3^\lambda e^{-x} dx$$

الدالة  $x \mapsto -e^{-x}$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto e^{-x}$  على المجال  $[3; \lambda]$  حيث  $\lambda > 3$ .

$$A(\lambda) = [-e^{-x}]_3^\lambda$$

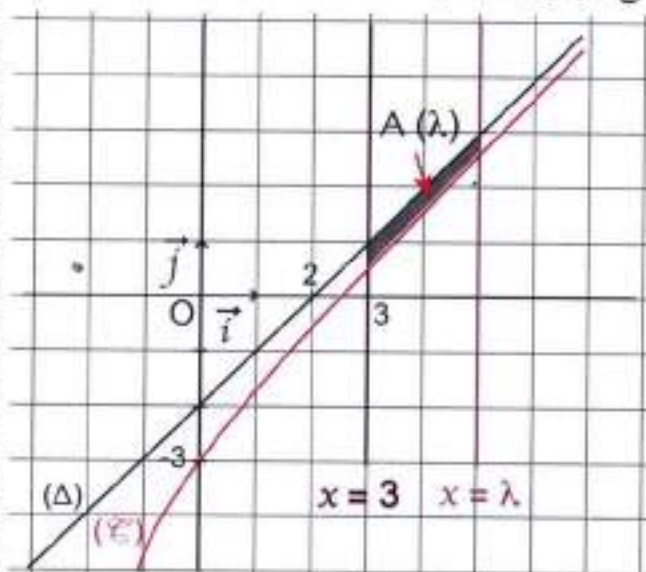
$$= -e^{-\lambda} + e^{-3}$$

و بالتالي  $A(\lambda) = -e^{-\lambda} + \frac{1}{e^3}$  (وحدة المساحات).

• حساب نهاية  $A(\lambda)$  لماؤول  $\lambda$  إلى  $+\infty$ .

لدينا  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left( -e^{-\lambda} + \frac{1}{e^3} \right) = \frac{1}{e^3}$  لأن  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-\lambda} = 0$

و بالتالي  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \frac{1}{e^3}$ .



7 حل في  $\mathbb{R}$  كلا من المترجمات التالية :

$$e^{2x} - e^x < 0 ; e^{x^2-2} \leq e^{4-x} ; e^x \geq \sqrt{e}$$

$$e^{4x} + 5e^{2x} - 6 \leq 0 ; e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0$$

$$e^{2x} > e^{x+1} ; e^{x^2} x e^x < (e^3)^2$$

### حساب دوال أصلية

8 في كل حالة من الحالات التالية، عيّن دالة

أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$ .

$$I = \mathbb{R} ; f(x) = e^{-x}$$

$$I = \mathbb{R} ; f(x) = \frac{1}{2} e^{3x} - 5e^{2x}$$

$$I = [0 ; +\infty[ ; f(x) = x e^{x^2}$$

$$I = \mathbb{R} ; f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

$$I = \mathbb{R} ; f(x) = \frac{-e^x}{(e^x + 3)^2}$$

9 عين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  حتى تكون

الدالة  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$F(x) = (a \sin x + b \cos x) e^x$$

دالة أصلية للدالة  $f$

$$f(x) = (5 \sin x - \cos x) e^x \text{ حيث}$$

### مسائل

10  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = e^x - e^{-x}$$

1. حل المعادلة  $f(x) = 0$  في  $\mathbb{R}$ .

2. عيّن النهايتين التاليتين :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

3. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

4. ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

5. حل بيانيا المعادلة  $f(x) = k$  حيث  $k$

عدد حقيقي.

### إستعمال الترميز $e^x$

1 بسط العبارات التالية :

$$(e^{3x})^2 ; e^{1-x} e^{3x+3} ; e^x e^{-2x} ; e^{2x} e^{3x}$$

$$\frac{e^{-0.2}}{e^{0.2}} ; \frac{e^5}{e^2} ; e^{\frac{1}{2}} e^{-2} ; (e^3)^2$$

2 عين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  بحيث من أجل

$$\frac{e^x + 1}{2e^x + 1} = a + \frac{be^x}{2e^x + 1} ; x \text{ كل عدد حقيقي}$$

3 عين الأعداد الحقيقية  $a, b$  و  $c$  بحيث من

$$\frac{e^{2x}}{e^x + 4} = ae^x + b + \frac{ce^x}{e^x + 4}, x \text{ كل عدد حقيقي}$$

### حساب نهايات

4 عين النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x) ; \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x+1} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x (e^{\frac{1}{x}} - 1) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2 + x - 5)e^x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (2xe + 3 - 5e^x)$$

### تعيين دوال مشتقة

5 في كل حالة من الحالات التالية، عين مجموعة

تعريف الدالة  $f$  و دالتها المشتقة  $f'$ .

$$f(x) = e^{3x+1} ; f(x) = 2e^x$$

$$f(x) = e^{\sin 2x} ; f(x) = e^{3-x}$$

$$f(x) = (3x+1)e^x ; f(x) = \sqrt{e^x}$$

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} ; f(x) = (x^2 - 2x)e^{-x}$$

$$f(x) = e^x \sin x ; f(x) = \frac{5e^x - 1}{1 - e^x}$$

$$f(x) = e^{-x} (\cos 3x - \sin 3x)$$

### حل معادلات و مترجمات

6 حل في  $\mathbb{R}$  كلا من المعادلات التالية :

$$e^{5x-1} = e^{x^2+5} ; e^{x^2} = e^{25} ; e^x = 1$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 ; e^x + 1 = \frac{2}{e^x} ; e^{\sin x} = e^{\cos x}$$

$$e^x + e^{-x} = 2 ; e^{4x} - e^{2x} = 0$$

$$e^{2x} + 5e^x - 6 = 0 ; e^{2x} + 2e^{-x} - 3 = 0$$



## تمارين و مسائل

7. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة كما يلي :

$$g(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} - f(x)$$

(أ) . حلل العبارة  $e^{2x} - 2e^x + 1$

(ب) . احسب  $g'(x)$  و  $g(0)$  . ادرس تغيرات  $g$  .

(ج) . استنتج الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{C})$  و المماس (T) .

8. ارسم (T) و  $(\mathcal{C})$  .

13 (I<sub>n</sub>) متتالية معرفة كما يلي :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

1. احسب I<sub>1</sub> .

2. برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n$$

3. احسب I<sub>2</sub> و I<sub>3</sub> .

14  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = xe^{-x} \text{ و } \lambda \text{ عدد حقيقي موجب تماما .}$$

1. ادرس تغيرات الدالة  $f$  .

2. ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  في المستوى

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

الوحدة 4 cm .

3. باستعمال المكاملة بالتجربة، احسب المساحة

$A(\lambda)$  للحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(\mathcal{C})$

و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين

$x = \lambda$  و  $x = 0$  على الترتيب .

ادرس نهاية  $A(\lambda)$  عندما يؤول  $\lambda$  إلى  $+\infty$  .

15 1. نعتبر الدالة  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$

$$g(x) = e^x - x - 1 \text{ كما يلي :}$$

- ادرس تغيرات الدالة  $g$  .

- احسب  $g(0)$  .

2. استنتج أن العبارة  $\frac{e^x}{e^x - x}$  موجبة من أجل

كل عدد حقيقي  $x$  .

6.  $\lambda$  عدد حقيقي موجب تماما .

أحسب المساحة  $A(\lambda)$  للحيز المستوي المحدود

بالمنحنى  $(\mathcal{C})$  و محور الفواصل و المستقيمين ذوي

المعادلتين  $x = \lambda$  و  $x = 0$  حيث  $\lambda > 0$  .

احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(\lambda)$  .

11 نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بـ :

$$f(x) = 2e^{2x} + e^x - 3$$

ليكن  $(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

1. تحقق من صحة المعلومات الواردة في الجدول

|        |           |   |           |
|--------|-----------|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | -3        | 0 | $+\infty$ |

التالي :

(نظم المعلومات المقدمة وفق ترتيب منطقي) .

2. عيّن معادلة للمماس (T) للمنحنى عند النقطة

ذات الفاصلة 0 .

3. ادرس إشارة العبارة  $f(x) - 5x$  على  $\mathbb{R}$  .

استنتج الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{C})$  و المماس (T) .

12 نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

و  $(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى

معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

1. عيّن مجموعة تعريف الدالة  $f$  .

2. احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .

3. بيّن أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \text{ احسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

4. أثبت أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  .

5. بيّن أن النقطة  $A(0; \frac{1}{2})$  مركز تناظر  $(\mathcal{C})$  .

6. عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى  $(\mathcal{C})$  عند

النقطة A .

6. عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها 0.

7. ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمماس (T).

8. ارسم المماس (T) والمنحنى (C).

**17** المستوي منسوب إلى معلم متعامد

و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، الوحدة  $1 \text{ cm}$ .

لتكن  $f$  الدالة المعرفة بـ:  $f(x) = (2 + \cos x) e^{1-x}$

و (C) المنحنى الممثل لها في المعلم السابق.

1. عيّن مجموعة تعريف  $f$ .

2. بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $f(x) > 0$ .

3. بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$$

استنتج أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$2 + \cos x + \sin x > 0$$

4. بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$e^{1-x} \leq f(x) \leq 3e^{1-x}$$

استنتج نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$ .

5. أثبت أن الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$ .

أخذ جدول تغيرات الدالة  $f$ .

6. ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

7. بين أن المعادلة  $f(x) = 3$  تقبل حلا واحدا  $\alpha$

حيث  $0 < \alpha < \pi$ .

8. ارسم المنحنى (C).

3. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$$

- تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) > 0$

- احسب  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

4. بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$f(x) = \frac{1}{1 - xe^x}$$

استنتج  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

5. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

6. (C) هو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (C).

- ارسم (C) في المعلم السابق.

**16** نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

الوحدة  $1 \text{ cm}$ .

1. عيّن مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

2. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

3. بين أن  $f(x)$  يكتب على الشكل

$$f(x) = a + \frac{b}{e^x + 1}$$

يطلب تعيينهما.

4. بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$$

و استنتج أن الدالة  $f$  فردية.

5. أثبت أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف.

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard\_equation



### 1 - الدالة «لوغاريتم نيبيري»

#### 1. مبرهنة وتعريف

- من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما، المعادلة  $e^x = x$  تقبل حلا وحيدا  $t$  يرمز له  $\ln x$ .
- العدد الحقيقي  $\ln x$  يقرأ اللوغاريتم النيبيري لـ  $x$ .
- الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب تماما  $x$  العدد  $\ln x$  تسمى الدالة «لوغاريتم نيبيري» ويرمز لها بـ  $\ln$ .

#### ملاحظات :

1. الدالة  $\ln : x \mapsto \ln x$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  و تأخذ قيمها في  $\mathbb{R}$ .

2. المعادلة  $e^x = x$  تقبل حلا وحيدا في  $\mathbb{R}$  : من أجل كل عدد حقيقي

موجب تماما  $x$  (لأن الدالة الأسية  $x \mapsto e^x$

معرفة، مستمرة و متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ ).

3. حل المعادلة  $e^x = y_0$ ، حيث  $y_0$  عدد حقيقي موجب تماما

هو العدد الحقيقي  $x$  فاصلة النقطة من المنحنى الممثل للدالة

$x \mapsto e^x$  ذات الترتيب  $y_0$ .

نكتب :  $x = \ln y_0$

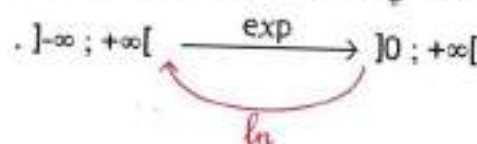
4. من أجل كل عدد حقيقي  $y$  موجب تماما، من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$e^x = y$  يكافئ  $x = \ln y$

5.  $e^0 = 1$  يعني  $\ln 1 = 0$  :  $e^1 = e$  يعني  $\ln e = 1$

6. التمثيل الموالي يسمح بالقول أن الدالة

$\ln : x \mapsto \ln x$  هي الدالة العكسية للدالة  $\exp : x \mapsto e^x$ .



7. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما،  $e^{\ln x} = x$ .

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $\ln e^x = x$ .

#### 2. مبرهنة

الدالة «لوغاريتم النيبيري»  $\ln$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$

موجب تماما،  $\ln' x = \frac{1}{x}$ .

### 3. خواص

من أجل كل عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  موجبين تماما و من أجل كل عدد ناطق  $n$ .

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \quad \left| \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y\right.$$

$$\ln(x^n) = n \ln x \quad \left| \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x\right.$$

**حالة خاصة:** من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما،  $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$ .

### 4. دراسة الدالة «اللوغاريتم الطبيعي»

الدالة  $\ln$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[$  و تأخذ قيمها في المجال  $]-\infty; +\infty[$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

الدالة  $\ln$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$ .

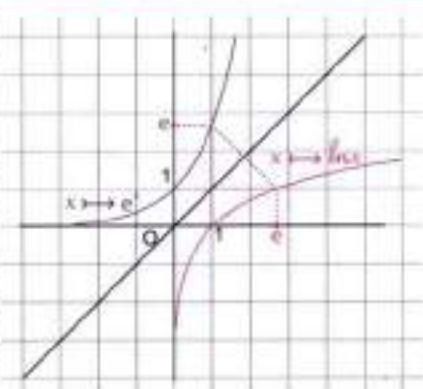
و من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما  $x$  :  $\ln' x = \frac{1}{x}$ .

الدالة  $\ln$  مستمرة على المجال  $]0; +\infty[$  (لأنها قابلة للاشتقاق على  $]0; +\infty[$ ).

الدالة  $\ln$  متزايدة تماما على المجال  $]0; +\infty[$ .

كما سبق يكون جدول تغيرات الدالة  $\ln$  كما يلي :

| $x$           | 0         | $+\infty$ |
|---------------|-----------|-----------|
| $\frac{1}{x}$ |           | +         |
| $\ln x$       | $-\infty$ | $+\infty$ |



المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  (أي محور الترتيب).

هو مستقيم مقارب للمنحنى المثل للدالة  $\ln$ .

المنحنى المثل للدالة  $\ln$  يقبل فرع قطع مكافئ بجوار  $+\infty$ .

في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(0; \overline{7}, \overline{7})$  المنحنيان المثلان للدالتين  $\ln$  و  $\exp$

منناظران بالنسبة إلى المستقيم ذي المعادلة  $y = x$ .

### 5. فتيجتان

من أجل كل عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  موجبين تماما،

$\ln a = \ln b$  إذا و فقط إذا كان  $a = b$ .

$\ln a < \ln b$  إذا و فقط إذا كان  $a < b$ .

تستعمل هاتان النتيجةتان لحل  
معادلات و متراجحات.

## 6. اشتقاق الدالة $x \mapsto \ln|u(x)|$ مبرهنة

u دالة معرفة على مجال I.

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I ولا تنعدم على I فإن الدالة  $x \mapsto \ln|u(x)|$  قابلة للاشتقاق على I و من أجل كل عدد حقيقي x من I،

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

## 7. نهايات شهيرة

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

## II - دوال لوغاريتم و دوال أسية أخرى

1. الدالة «اللوغاريتم العشري»

تعريف

الدالة «اللوغاريتم العشري» يرمز لها  $\log$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

ملاحظات

$$\ln 10 \approx 2,30 \quad ; \quad \log 10 = 1 \quad ; \quad \log 1 = 0$$

2. الدالة  $\log$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$

و دالتها المشتقة معرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي :

$$(\log x)' = \frac{1}{x \ln 10}$$

3. الدالة  $\log$  لها نفس تغيرات الدالة  $\ln$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

خواص

من أجل كل عددين حقيقيين x و y موجبين تماما و من أجل كل عدد ناطق n،

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

$$\log(x^n) = n \log x$$

$$\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log x$$

نتيجة : من أجل كل عددين حقيقيين a و b موجبين تماما،

$$a = b \quad \text{يكافئ} \quad \log a = \log b$$

$$a < b \quad \text{يكافئ} \quad \log a < \log b$$



## 2. الدوال الأسية ذات الأساس a

### تعريف

a عدد حقيقي موجب تماما حيث  $a \neq 1$ .  
نسمي الدالة الأسية ذات الأساس a، يرمز لها  $\exp_a$ ، الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي  $\exp_a(x) = a^x$ .

### ملاحظة

من أجل كل عدد حقيقي x و من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماما حيث  $a \neq 1$ ،  $a^x = e^{x \ln a}$ .

### خواص

من أجل كل عددين حقيقيين a و b موجبين تماما حيث  $a \neq 1$  و  $b \neq 1$  و من أجل كل عددين حقيقيين x و y،

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$a^{x \cdot y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

## 3. تغيرات الدالة $\exp_a$

1. إذا كان  $0 < a < 1$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$  :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$

إذا كان  $a > 1$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

2. الدالة  $\exp_a$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

و من أجل كل عدد حقيقي x :  $\exp'_a(x) = (\ln a) a^x$

3. إذا كان  $0 < a < 1$  فإن الدالة  $\exp_a$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$ .

إذا كان  $a > 1$  فإن الدالة  $\exp_a$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

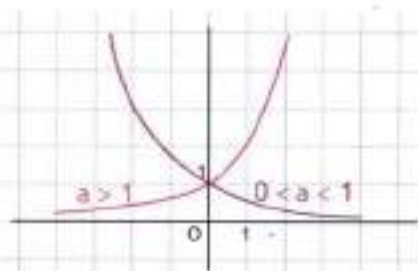
| x        | $-\infty$ | $+\infty$ |
|----------|-----------|-----------|
| $(a^x)'$ | +         |           |
| $a^x$    | 0         | $+\infty$ |

$a > 1$

| x        | $-\infty$ | $+\infty$ |
|----------|-----------|-----------|
| $(a^x)'$ | -         |           |
| $a^x$    | $+\infty$ | 0         |

4. جدول التغيرات

$0 < a < 1$



5. عندما a يسبح  $\mathbb{R}_+^*$  و  $a \neq 1$  كل منحنيات

الدالة  $\exp_a$  تشمل النقطة ذات الإحداثيين (0; 1).

• محور الفواصل هو مستقيم مقارب أفقي لهذه المنحنيات.

• كل هذه المنحنيات تقبل فرع قطع مكافئ منحناء

هو منحنى محور الترتيب.

### III - الدالة « جذر نوني »

تعريف

$n$  عدد طبيعي أكبر تماماً من 1.

نسمى الدالة « جذر نوني » و نرمز لها بـ  $\sqrt[n]{x}$  ، الدالة المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$  و التي ترفق بكل عدد حقيقي  $x$  موجب ، العدد الموجب  $\sqrt[n]{x}$  حيث  $(\sqrt[n]{x})^n = x$ .

نتيجة

1. من أجل كل عدد حقيقي موجب  $x$  :  $A = \sqrt[n]{x}$  يكافئ  $A^n = x$ .

2. من أجل كل عدد حقيقي موجب  $x$  :  $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ .

3. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماماً :  $\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n} \ln x}$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[n]{x} = 0$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ .

### IV - التزايديات المقارنة

نعلم أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$  حيث  $n$  عدد طبيعي غير منعدم.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

مبرهنة

$n$  عدد طبيعي غير منعدم.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$

نتيجة

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^x = 0$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n \ln x = 0$

### التفسير البياني للتزايديات المقارنة

نرسم المنحنيات المثلثة للدوال

$x \mapsto e^x$  :  $x \mapsto \ln x$  :  $x \mapsto x^3$

في نفس المعلم المتعامد  $(\vec{i}, \vec{j})$  ، (الشكل).

نلاحظ أنه يوجد عدد حقيقي موجب تماماً  $A$  حيث من أجل

$x > A$  ، يكون  $e^x > x^3 > \ln x$  (بالحاسبة  $A \approx 4,6$ ).

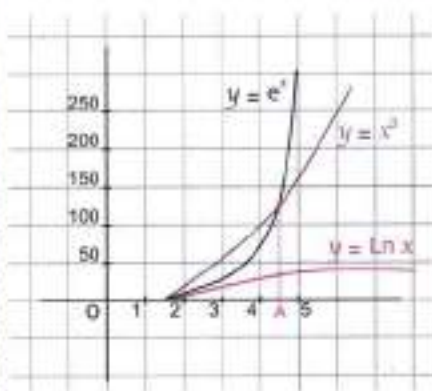
نقول إن الدالة  $x \mapsto e^x$  تتزايد بسرعة أكبر بالنسبة إلى

الدالة  $x \mapsto x^3$  و الدالة  $x \mapsto x^3$  تتزايد بسرعة أكبر بالنسبة إلى الدالة  $x \mapsto \ln x$  بجوار  $+\infty$ .

بصفة عامة، من أجل كل عدد طبيعي أكبر تماماً من 1، يوجد عدد حقيقي موجب تماماً  $A$  حيث

من أجل  $x > A$  ، يكون  $e^x > x^3 > \ln x$  أي الدالة  $x \mapsto e^x$  تتزايد بسرعة أكبر بالنسبة إلى

الدالة  $x \mapsto x^n$  و الدالة  $x \mapsto x^n$  تتزايد بسرعة أكبر بالنسبة إلى الدالة  $x \mapsto \ln x$  بجوار  $+\infty$ .



اكتب على أبسط شكل الأعداد التالية :

$$\ln 72 - 2\ln \frac{27}{256} + \ln \sqrt{108} \quad : \quad \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 8 + 4\ln \sqrt{2} \quad : \quad \ln 32$$

$$\ln \frac{1}{8} - \ln 0,375 + 2\ln \sqrt{0,5625}$$

حل

$$1. \text{ لدينا } \ln 32 = 5\ln 2 \quad \text{إذن} \quad \ln 32 = \ln 2^5 = 5\ln 2$$

$$2. \text{ لدينا } \ln \sqrt{2} = \ln 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln 2 \quad : \quad \ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2 \quad : \quad \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$\text{إذن} \quad \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 8 + 4\ln \sqrt{2} = -\ln 2 + \frac{1}{2} \times 3\ln 2 + 4 \times \frac{1}{2} \ln 2$$

$$= -\ln 2 + \frac{3}{2} \ln 2 + 2\ln 2$$

$$= \left(-1 + \frac{3}{2} + 2\right) \ln 2 = \frac{5}{2} \ln 2$$

$$\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 8 + 4\ln \sqrt{2} = \frac{5}{2} \ln 2 \quad \text{نتج أن}$$

$$3. \text{ لدينا } \ln 72 = \ln (9 \times 8) = \ln 9 + \ln 8$$

$$= 2\ln 3 + 3\ln 2$$

$$\ln \frac{27}{256} = \ln 27 - \ln 256 = \ln 3^3 - \ln 2^8$$

$$= 3\ln 3 - 8\ln 2$$

$$\ln \sqrt{108} = \frac{1}{2} \ln 108 = \frac{1}{2} \ln 4 \times 27$$

$$= \frac{1}{2} \ln 4 + \frac{1}{2} \ln 27 = \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 3$$

$$\text{إذن} \quad \ln 72 - 2\ln \frac{27}{256} + \ln \sqrt{108} = 2\ln 3 + 3\ln 2 - 2(3\ln 3 - 8\ln 2) + \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 3$$

$$= 2\ln 3 + 3\ln 2 - 6\ln 3 + 16\ln 2 + \ln 2 + \frac{3}{2} \ln 3$$

$$= \left(2 - 6 + \frac{3}{2}\right) \ln 3 + (3 + 16 + 1) \ln 2 = -\frac{5}{2} \ln 3 + 20\ln 2$$

$$\text{إذن} \quad \ln 72 - 2\ln \frac{27}{256} + \ln \sqrt{108} = -\frac{5}{2} \ln 3 + 20\ln 2$$



$$\ln \frac{1}{8} = -\ln 8 = -3\ln 2 \quad \text{لدينا} \quad 4.$$

$$\ln 0,375 = \ln \frac{375}{1000} = \ln \frac{3}{8} = \ln 3 - \ln 8 = \ln 3 - 3\ln 2$$

$$2\ln \sqrt{0,5625} = \ln 0,5625 = \ln \frac{5625}{10000} = \ln \frac{5}{16} = \ln 5 - \ln 16 = 2\ln 3 - 4\ln 2$$

$$\ln \frac{1}{8} - \ln 0,375 + 2\ln \sqrt{0,5625} = -3\ln 2 - \ln 3 + 3\ln 2 + 2\ln 3 - 4\ln 2 \quad \text{إذن}$$

$$= -4\ln 2 + \ln 3$$

$$\ln \frac{1}{8} - \ln 0,375 + 2\ln \sqrt{0,5625} = -4\ln 2 + \ln 3 \quad \text{و بالتالي}$$

## 2 حل معادلات و متراجعات

### تمرين 1

حل في  $R$  كل معادلة من المعادلات التالية

$$\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3) \quad ; \quad \ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2 \quad ; \quad \ln x = 2$$

$$\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$$

### حل

$$1. \text{ حل المعادلة } \ln x = 2$$

$\ln x$  معرف إذا كان  $x > 0$ .

إذن  $\ln x = 2$  يعني  $x > 0$  و  $\ln x = \ln e^2$  و بالتالي  $x = e^2$

ينتج أن المعادلة  $\ln x = 2$  تقبل حلا واحدا في  $R$  هو  $e^2$ .

**طريقة أخرى:** نعلم أن من أجل  $x > 0$  و  $y$  عدد حقيقي،  $y = \ln x$  يكافئ  $x = e^y$

لدينا  $\ln x = 2$  إذن  $x = e^2$ .

$$2. \text{ حل المعادلة } \ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2$$

$\ln(x-1)$  معرف إذا كان  $x-1 > 0$  أي  $x > 1$ .

إذن  $\ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2$  يعني  $x > 1$  و  $\ln(x-1) = \ln 3^2 - \ln 2^3$

$$\ln(x-1) = \ln \frac{9}{8} \quad \text{أي } x > 1 \text{ و}$$

$$\text{و بالتالي } x-1 = \frac{9}{8} \quad \text{أي } x = \frac{17}{8}$$

ينتج أن المعادلة  $\ln(x-1) = 2\ln 3 - 3\ln 2$  تقبل حلا واحدا و هو  $\frac{17}{8}$ .

$$3. \text{ حل المعادلة } \ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$$

لحل هذه المعادلة نضع الشرط التالي  $x > 0$  و  $3x+2 > 0$  و  $2x+3 > 0$  أي  $x > 0$ .

$$\text{لدينا } \ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3) \text{ يعني } x > 0 \text{ و } \ln x(3x+2) = \ln(2x+3)$$

$$\text{إذن } x > 0 \text{ و } x(3x+2) = 2x+3$$

$$\text{أي } x > 0 \text{ و } 3x^2 + 2x = 2x + 3$$

$$\text{أي } x > 0 \text{ و } 3x^2 - 3 = 0$$

$$\text{إذن } x > 0 \text{ و } (x=1 \text{ أو } x=-1) \text{ ينتج أن } x=1.$$

$$\text{وبالتالي المعادلة } \ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3) \text{ تقبل حلا واحدا هو 1.}$$

$$4. \text{ حل المعادلة } \ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$$

$$\text{لحل هذه المعادلة نضع الشرط التالي } x^2 - 2x - 3 > 0 \text{ و } x+7 > 0.$$

$$\text{لدينا } x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

$$\text{إذن } x^2 - 2x - 3 > 0 \text{ إذا وفقط إذا كان } x \in ]-\infty; -1[ \cup ]3; +\infty[.$$

$$\text{و } x+7 > 0 \text{ إذا وفقط إذا كان } x > -7.$$

$$\text{ينتج أن } x \in ]-\infty; -7[ \cup ]3; +\infty[.$$

$$\text{حل المعادلة } \ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7) \text{ في المجموعة } ]-\infty; -7[ \cup ]3; +\infty[.$$

$$\text{لدينا } \ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7) \text{ إذا وفقط إذا كان } x \in ]-\infty; -7[ \cup ]3; +\infty[.$$

$$\text{و } x^2 - 2x - 3 = x+7 \text{ أي } x \in ]-\infty; -7[ \cup ]3; +\infty[ \text{ و } x^2 - 3x - 10 = 0.$$

$$\text{حل المعادلة } x^2 - 3x - 10 = 0 \text{ في المجموعة } ]-\infty; -7[ \cup ]3; +\infty[.$$

$$\Delta = 49 : \Delta > 0 \text{ إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين هما } x_1 = 5 \text{ و } x_2 = -2.$$

$$\text{لدينا 5 و -2 ينتميان إلى المجموعة } ]-\infty; -7[ \cup ]3; +\infty[.$$

$$\text{وبالتالي المعادلة } \ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7) \text{ تقبل حلين مختلفين هما 5 و -2.}$$

## تمرين 2

حل كل متراجحة من المتراجحات التالية

$$\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0 : \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0 : \ln(x-1) \geq 0$$

$$\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$$

1. حل المتراجحة  $\ln(x-1) \geq 0$

لحل المتراجحة  $\ln(x-1) \geq 0$  نضع الشرط التالي  $x-1 > 0$  أي  $x > 1$ .

حل المتراجحة  $\ln(x-1) \geq 0$  في المجال  $]1; +\infty[$ .

لدينا  $\ln(x-1) \geq \ln 1$  يعني  $x > 1$  و  $\ln(x-1) \geq \ln 1$

أي  $x > 1$  و  $x-1 \geq 1$  أي  $x > 1$  و  $x \geq 2$  إذن  $x \geq 2$ .

وبالتالي مجموعة حلول المتراجحة  $\ln(x-1) \geq 0$  هي  $[2; +\infty[$ .

2. حل المتراجحة  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$

لحل المتراجحة  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$  نضع الشرط التالي  $x \neq -1$  و  $\frac{x-1}{x+1} > 0$ .

أي  $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$ .

حل في المجموعة  $]1; +\infty[ \cup ]-\infty; -1[$  المتراجحة  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$ .

لدينا  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$  يعني  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > \ln 1$  أي  $\frac{x-1}{x+1} > 1$ .

أي  $\frac{x-1}{x+1} - 1 > 0$  أي  $\frac{-2}{x+1} > 0$  أي  $\frac{2}{x+1} < 0$ .

إذن  $x+1 < 0$  وبالتالي  $x < -1$ .

نتج أن مجموعة حلول المتراجحة  $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$  هي  $]1; +\infty[ \cup ]-\infty; -1[$ .

3. حل المتراجحة  $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$

لحل المتراجحة  $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$  نضع الشرط التالي  $x+1 > 0$  و  $3-x > 0$ .

أي  $x > -1$  و  $x < 3$  أي  $x \in ]-1; 3[$ .

حل المتراجحة  $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$  في المجال  $]1; 3[$ .

لدينا  $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$  يعني  $\ln(x+1)(3-x) < \ln 1$

إذن  $(x+1)(3-x) < 1$  وبالتالي  $x^2 - 2x - 2 > 0$

أي  $(x-1+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{3}) > 0$

إذن  $x \in ]-\infty; 1-\sqrt{3}[ \cup ]1+\sqrt{3}; 3[$  و  $x \in ]-1; 3[$  إذن  $x \in ]-1; 1-\sqrt{3}[ \cup ]1+\sqrt{3}; 3[$ .

نتج أن مجموعة حلول المتراجحة  $\ln(x+1) + \ln(3-x) < 0$  هي  $]1; 1-\sqrt{3}[ \cup ]1+\sqrt{3}; 3[$ .



4. حل المتراجحة  $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$ .

لحل المتراجحة  $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$  نضع الشرط التالي  $x^2 - 1 > 0$  و  $4x - 1 > 0$  أي  $x \in ]1; +\infty[$ .

لحل المتراجحة  $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$  في المجال  $]1; +\infty[$ .

لدينا  $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$  إذا وفقط إذا كان  $x^2 - 1 \geq 4x - 1$  أي  $x^2 - 4x \geq 0$  إذن  $x(x - 4) \geq 0$ .

وبالتالي  $x \geq 4$  أي  $x \in [4; +\infty[$ .

ينتج أن مجموعة حلول المتراجحة  $\ln(x^2 - 1) \geq \ln(4x - 1)$  هي  $[4; +\infty[$ .

### 3 حساب نهايات

#### تقريبن

احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + (\ln x)^2) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + (\ln x)^2)$$

#### حل

1. حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x)$

الدالة  $x \mapsto 2x - \ln x$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 2 - \frac{\ln x}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2 - \frac{\ln x}{x} \right) = 2 \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( 2 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\text{ينتج أن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x) = +\infty$$

2. حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right)$

الدالة  $x \mapsto \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right)$  معرفة على المجال  $] -1; 1[$ .

$$\text{لدينا} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1+x} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{1-x}{1+x} > 0 \quad \text{على المجال} \quad ] -1; 1[$$

$$\text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln \left( \frac{1-x}{1+x} \right) = -\infty$$

3. حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + (\ln x)^2)$

الدالة  $x \mapsto x^2 + (\ln x)^2$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

و نعلم أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + (\ln x)^2) = +\infty$

4. حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + (\ln x)^2)$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  و نعلم أن  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x)^2 = +\infty$  ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + (\ln x)^2) = +\infty$

5. حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

الدالة  $x \mapsto x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$  معرفة على المجال  $]0; +\infty[ \cup ]-\infty; -1[$ .

لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

إذن توجد حالة عدم التعيين.

نضع  $y = \frac{1}{x}$  عندما  $x \rightarrow +\infty$  :  $y \rightarrow 0$

لدينا  $x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1+y)}{y}$

ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$

وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

6. حساب النهاية  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

بوضع  $y = \frac{1}{x}$  لدينا  $x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(1+y)}{y}$

وعندما  $x \rightarrow +\infty$  :  $y \rightarrow 0$

إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$

وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

#### 4 تعيين دوال مشتقة

##### تمرين 1

ف دالة معرفة على المجال  $[0; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = x^2(-1 + 2\ln x)$  إذا كان  $x > 0$  و  $f(0) = 0$ .

1. هل الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند العدد 0 عن اليمين ؟

2. عين الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$ .

##### حل

1. الدالة  $f$  معرفة على المجال  $[0; +\infty[$ .

$$\text{لدينا } \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2(-1 + 2\ln x)}{x}$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما :  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x(-1 + 2\ln x)$

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(-1 + 2\ln x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x + 2x\ln x) = 0$$

$$\text{و بالتالي } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

ينتج أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند العدد 0 عن اليمين و  $f'(0) = 0$ .

2. الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0; +\infty[$  ( $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0; +\infty[$  وقابلة للاشتقاق عند العدد 0 عن اليمين).

من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما  $x$  :  $f'(x) = 2x(-1 + 2\ln x) + x^2\left(\frac{2}{x}\right)$

$$= -2x + 4x\ln x + 2x$$

$$= 4x\ln x$$

أي من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما  $x$  :  $f'(x) = 4x\ln x$  و  $f'(0) = 0$ .

إذن الدالة  $f'$  معرفة كما يلي :  $f'(x) = 4x\ln x$  إذا كان  $x > 0$  و  $f'(0) = 0$ .



## تمرين 2

$f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^{2x})$  : هي الدالة المعروفة كما يلي :

1. عين مجموعة تعريف الدالة  $f$ .
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  على مجموعة تعريفها.
3. عين الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$ .

حل

1. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $1 + e^{2x} > 0$  . إذن الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

2. الدالة  $e^{-x} \rightarrow x$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

و الدالة  $\ln(1 + e^{2x}) \rightarrow x$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  . (اشتقاق دالة مركبة)

إذن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  . (اشتقاق جداء دالتين).

3. تعيين الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$ .

$$f'(x) = -e^{-x} \ln(1 + e^{2x}) + e^{-x} \left( \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} \right) : \text{ من أجل كل عدد حقيقي } x$$

$$= -e^{-x} \ln(1 + e^{2x}) + \frac{2e^x}{1 + e^{2x}}$$

$$f'(x) = -e^{-x} \ln(1 + e^{2x}) + \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} : \text{ إذن من أجل كل عدد حقيقي } x$$

## تمرين 3

$f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$  : هي الدالة المعروفة كما يلي :

1. عين مجموعة تعريف الدالة  $f$ .
2. عين الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$ .

حل

1. الدالة  $f$  معرفة إذا وفقط إذا كان  $2+x \neq 0$  و  $\frac{2-x}{2+x} > 0$  أي  $x \in ]-2; 2[$ .

و بالتالي مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي المجال  $] -2; 2[$ .

2. الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $] -2; 2[$ .

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2-x}{2+x}\right)'}{\frac{2-x}{2+x}} : \text{ و من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال } ] -2; 2[$$

$$\left(\frac{2-x}{2+x}\right)' = \frac{-4}{(2+x)^2} : \text{ لدينا من أجل كل عدد حقيقي من المجال } ] -2; 2[$$

$$f'(x) = \frac{-4}{4+x^2} : \text{ بعد التبسيط، ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال } ] -2; 2[$$

$$f \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R} - \left\{-1; -\frac{1}{2}\right\} \text{ كما يلي : } f(x) = \frac{2x^2 - x - 2}{2x^2 + 3x + 1}$$

1. عين الأعداد الحقيقية  $a, b, c$  حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $-\frac{1}{2}$  و  $-1$

$$f(x) = a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{x+1}$$

2. استنتج الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على المجال  $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$  حيث  $F(0) = -1$ .

حل

1. الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $\mathbb{R} - \left\{-1; -\frac{1}{2}\right\}$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $-\frac{1}{2}$  و  $-1$

$$a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{x+1} = \frac{a(2x+1)(x+1) + b(x+1) + c(2x+1)}{(2x+1)(x+1)}$$

$$= \frac{2ax^2 + (3a + b + 2c)x + a + b + c}{2x^2 + 3x + 1}$$

$$f(x) = a + \frac{b}{2x+1} + \frac{c}{x+1} \quad \text{إذن}$$

$$\frac{2ax^2 + (3a + b + 2c)x + a + b + c}{2x^2 + 3x + 1} = \frac{2x^2 - x - 2}{2x^2 + 3x + 1} \quad \text{يعني}$$

$$2a = 2 \quad \text{و} \quad 3a + b + 2c = -1 \quad \text{و} \quad a + b + c = -2$$

باستعمال طريقة التعويض، ينتج أن  $a = 1$  و  $b = -2$  و  $c = -1$ .

إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $-\frac{1}{2}$  و  $-1$  :  $f(x) = 1 - \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1}$

2. تعيين الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على المجال  $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$  حيث  $F(0) = -1$

الدالة  $x \mapsto x$  هي دالة أصلية للدالة  $1 \mapsto x$  على  $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ .

الدالة  $x \mapsto \ln(2x+1)$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{2}{2x+1}$  على  $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ .

الدالة  $x \mapsto \ln(x+1)$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{1}{x+1}$  على  $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ .

(استعمال المبرهنة حول الدوال الأصلية للدوال من الشكل  $(x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)})$ )

إذن الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$  هي الدوال

$$d \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad x \mapsto x - \ln(2x+1) - \ln(x+1) + d$$

لدينا  $F(0) = -1$  أي  $0 + d = -1$  ينتج أن  $d = -1$ .

إذن الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$  حيث  $F(0) = -1$

هي الدالة  $x \mapsto x - \ln(2x+1) - \ln(x+1) - 1$ .

## 6 استعمال اللوغاريتم العشري والدالة الأسية ذات الأساس $a$

### تمرين 1

بسط الأعداد التالية :

$$\sqrt[4]{25} \times 125^{\frac{3}{4}} : \sqrt[3]{729} : \log(0,81 \times 10^{-2} \times 3^{13}) : \log 16$$

### حل

$$\log 16 = \log 2^4 = 4 \log 2 \quad \text{لدينا}$$

$$\log 16 = 4 \log 2 \quad \text{إذن}$$

$$\log(0,81 \times 10^{-2} \times 3^{13}) = \log 0,81 + \log 10^{-2} + \log 3^{13} \quad \text{لدينا}$$

$$= \log \frac{81}{100} - 2 + 13 \log 3$$

$$= \log 81 - \log 100 + (-2) + 13 \log 3$$

$$= 4 \log 3 - 2 - 2 + 13 \log 3$$

$$= -4 + 17 \log 3$$

$$\log(0,81 \times 10^{-2} \times 3^{13}) = -4 + 17 \log 3 \quad \text{إذن}$$

$$\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{3^6} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2 = 9 \quad \text{لدينا}$$

$$\sqrt[4]{25} \times 125^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^2} \times 5^{\frac{9}{4}} \quad \text{لدينا}$$

$$= 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{9}{4}} = 5^{\frac{11}{4}}$$

$$\sqrt[4]{25} \times 125^{\frac{3}{4}} = 5^{\frac{11}{4}} \quad \text{إذن}$$



## تقريب

حل في  $R$  كل معادلة من المعادلات التالية

$$10^{4x} = 9 \quad : \quad \log(2x) - \log(x+1) = \log(x-1) \quad : \quad \log(3x+4) = 0$$

$$10^x - 2 \times 10^{-x} = 1$$

## حل

• حل المعادلة  $\log(3x+4) = 0$  بوضع الشرط  $3x+4 > 0$  أي  $x \in ]-\frac{4}{3}; +\infty[$ .

$$\log(3x+4) = \log 1 \quad \text{يعني} \quad x \in ]-\frac{4}{3}; +\infty[ \quad \text{و} \quad \log(3x+4) = \log 1$$

$$\text{أي} \quad x \in ]-\frac{4}{3}; +\infty[ \quad \text{و} \quad 3x+4 = 1 \quad \text{إذن} \quad x = -1$$

وبالتالي المعادلة  $\log(3x+4) = 0$  تقبل حلا واحدا هو  $-1$ .

• حل المعادلة  $\log(2x) - \log(x+1) = \log(x-1)$  بوضع الشرط  $2x > 0$  و  $x+1 > 0$

و  $x-1 > 0$  أي  $x > 1$ .

$$\log\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \log(x-1) \quad \text{و} \quad x > 1 \quad \text{يعني} \quad \log(2x) - \log(x+1) = \log(x-1)$$

$$\frac{2x}{x+1} = x-1 \quad \text{و} \quad x > 1$$

$$\text{أي} \quad x > 1 \quad \text{و} \quad x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta' = 2. \quad \text{حلا المعادلة} \quad x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \text{هما} \quad 1 + \sqrt{2} \quad \text{و} \quad 1 - \sqrt{2}$$

إذن المعادلة  $\log(2x) - \log(x+1) = \log(x-1)$  تقبل حلا واحدا هو  $1 + \sqrt{2}$ .

• حل المعادلة  $10^{4x} = 9$  حيث  $x$  عدد حقيقي.

$$\text{لدينا} \quad 10^{4x} = 9 \quad \text{يعني} \quad \log 10^{4x} = \log 9$$

$$\text{أي} \quad 4x = \log 9 \quad \text{إذن} \quad x = \frac{1}{4} \log 9$$

وبالتالي المعادلة  $10^{4x} = 9$  تقبل حلا واحدا في  $R$  هو  $\frac{1}{4} \log 9$ .

• حل المعادلة  $10^x - 2 \times 10^{-x} = 1$ .

$$\text{لدينا} \quad 10^x - 2 \times 10^{-x} = 1 \quad \text{يكافئ} \quad 10^x - 2 \times \frac{1}{10^x} - 1 = 0$$

$$\text{أي} \quad 10^{2x} - 10^x - 2 = 0 \quad \text{أي} \quad (10^x)^2 - 10^x - 2 = 0$$

بوضع  $t = 10^x$  نحصل المعادلة  $t^2 - t - 2 = 0$  حيث  $t > 0$ . ينتج أن  $t = 2$ .

لدينا  $t = 2$  و  $t = 10^x$  إذن  $10^x = 2$  وبالتالي  $x = \log 2$ .

ينتج أن المعادلة  $10^x - 2 \times 10^{-x} = 1$  تقبل حلا واحدا هو  $\log 2$ .

ف دالة معرفة كما يلي :  $f(x) = -\frac{x}{x+1} + \ln(x+1)$  و  $(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل لها في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (الوحدة 2 cm)

1. عين مجموعة التعريف  $E$  للدالة  $f$ .

2. أدرس نهاية الدالة  $f$  عندما يزول  $x$  إلى  $-1$  بقيم أكبر.

(يمكن كتابة  $f(x)$  على الشكل  $\frac{1}{x+1} \varphi(x)$ .)

3. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

4. عين معادلة للمماس  $(T)$  للمنحنى  $(\mathcal{C})$  عند النقطة ذات لفاصلة 1.

5. ادرس تغيرات الدالة  $g$  المعرفة كما يلي :  $g(x) = f(x) - \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4} + \ln 2\right)$ .

استنتج إشارة  $g(x)$  ثم الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{C})$  و المماس  $(T)$ .

6. ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$ .

7. بين أنه يوجد عدنان حقيقيان  $a$  و  $b$  حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $E$ ,  $\frac{x}{x+1} = a + \frac{b}{x+1}$ .

8. باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب التكامل  $\int_0^1 \ln(1+x) dx$ .

9. احسب المساحة  $\mathcal{A}$  للحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(\mathcal{C})$  و المستقيمت ذات المعادلات

$x=1$  ;  $x=0$  ;  $y=0$ . عين قيمة  $\mathcal{A}$  بالسنتيمترات المربعة.

حل

1. الدالة  $x \mapsto -\frac{x}{x+1}$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  و الدالة  $\ln(x+1)$  معرفة من أجل

$x > -1$ . أي  $x \in ]-1; +\infty[$ . إذن مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي  $] -1; +\infty[$ . أي  $E = ]-1; +\infty[$ .

2. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $] -1; +\infty[$  :  $f(x) = \frac{1}{x+1} [-x + (x+1) \ln(x+1)]$

نعلم أن  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ . إذن  $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \ln(x+1) = 0$

و بالتالي  $\lim_{x \rightarrow -1} [-x + (x+1) \ln(x+1)] = 1$ . ولدينا  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = +\infty$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -1} [-x + (x+1) \ln(x+1)] = 1$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

3. لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x}{x+1}\right) = -1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

. الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $] -1; +\infty[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$f'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

إشارة  $f'(x)$  على  $E$  هي إشارة  $x$  على  $E$ . ينتج أن الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $]-1; 0]$  و متزايدة على المجال  $[0; +\infty[$ .

| $x$     | -1        | 0 | $+\infty$ |
|---------|-----------|---|-----------|
| $f'(x)$ |           | - | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | 0 | $+\infty$ |

جدول تغيرات الدالة  $f$  :

• دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$  إذن المستقيم ذو المعادلة  $x = -1$  مستقيم مقارب بوازي محور الترتيب.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  (لأن  $\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{x+1} + \left(\frac{x+1}{x}\right) \frac{\ln(x+1)}{x+1}$ )

و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$  إذن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل فرع قطع مكافئ وفي اتجاه محور الفواصل بجوار  $+\infty$ .

4. لدينا  $f(1) = -\frac{1}{2} + \ln 2$  و  $f'(1) = \frac{1}{4}$ .

إذن معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي  $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4} + \ln 2$ .

5. دراسة تغيرات الدالة  $g$ .

الدالة  $g$  معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال  $]-1; +\infty[$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$g'(x) = -\frac{(x-1)^2}{4(x+1)^2} : ]-1; +\infty[$$

نلاحظ أن  $g'(x) = 0$  من أجل  $x = 1$ .

إذن من أجل كل عدد حقيقي من  $]-1; +\infty[$  :  $g'(x) \leq 0$ .

و بالتالي الدالة  $g$  متناقصة تماما على المجال  $]-1; +\infty[$ .

جدول تغيرات  $g$  :

| $x$     | -1        | 1 | $+\infty$ |
|---------|-----------|---|-----------|
| $g'(x)$ |           | - | -         |
| $g(x)$  | $+\infty$ | 0 | $-\infty$ |

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  و  $g(1) = 0$

من جدول تغيرات الدالة  $g$  ينتج أن  $g(x) < 0$  على المجال  $]1; +\infty[$

ينتج أن  $(\mathcal{C})$  فوق (T) على المجال  $]1; +\infty[$  ،  $(\mathcal{C})$  تحت (T) على المجال  $]-1; 1]$

(T) يقطع  $(\mathcal{C})$  في النقطة ذات الفاصلة 1.

نلاحظ أن النقطة ذات الفاصلة 1 من  $(\mathcal{C})$

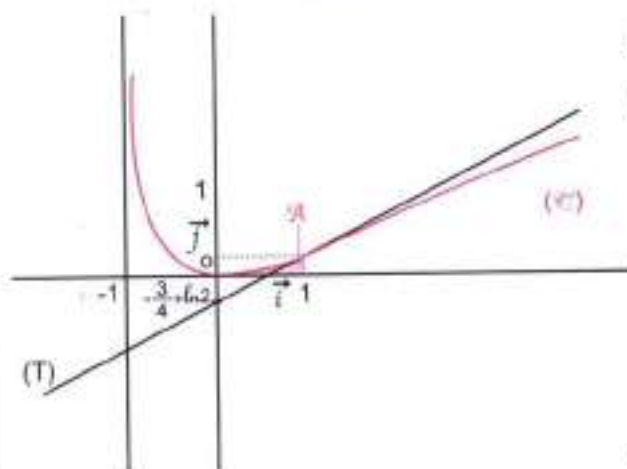
هي نقطة إنعطاف  $(\mathcal{C})$  (لأن (T)

يقطع  $(\mathcal{C})$  فيها).

6. رسم المنحنى  $(\mathcal{C})$  و المماس (T).

$$f(1) = -\frac{1}{2} + \ln 2 \approx 0,19$$

$$-\frac{3}{4} + \ln 2 \approx 0,60$$





## تمارين و حلول نموذجية

7. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $E$  :  $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$  إذن  $a=1$  و  $b=-1$

8. حساب التكامل  $\int_0^1 \ln(1+x) dx$

نضع  $u'(x) = \frac{1}{x+1}$  و  $v(x) = x+1$  إذن  $u(x) = \ln(x+1)$  و  $v'(x) = 1$

ينتج أن  $\int_0^1 \ln(x+1) dx = \left[ (x+1) \ln(x+1) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1}{x+1} dx$

$$= \left[ (x+1) \ln(x+1) - x \right]_0^1 = 2 \ln 2 - 1$$

إذن  $\int_0^1 \ln(x+1) dx = 2 \ln 2 - 1$

**ملاحظة :** يمكن إختبار  $v(x) = x$  لحساب التكامل السابق.

$$9. \mathcal{A} = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left[ (-1 + \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)) \right] dx$$

$$= \left[ -x + \ln(x+1) + (x+1) \ln(x+1) - x \right]_0^1$$

$$= -2 + 3 \ln 2$$

إذن  $\mathcal{A} = -2 + 3 \ln 2$  وحدة المساحات

و بالتالي  $\mathcal{A} = 4(-2 + 3 \ln 2) \text{ cm}^2$  أي  $\mathcal{A} \approx 0,32 \text{ cm}^2$

خواص جبرية

1 بسط :  $\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

$4 \ln(\sqrt{2}+1) + 4 \ln(\sqrt{2}-1) - 5 \ln 2$

$\frac{\ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1)}{2}$

$\frac{7}{16} \ln(3+2\sqrt{2}) - 4 \ln(\sqrt{2}+1) - \frac{25}{8} \ln(\sqrt{2}-1)$

$2 \ln e^4 ; 8 - \ln \frac{1}{e}$

2 a و b عددان حقيقيان موجبان تماما.

عبر عن  $\ln a^2 b^3$  و  $6 \ln \frac{1}{\sqrt{a^2 b}}$  بدلالة  $\ln a$  و  $\ln b$ .

3 عبر عن الأعداد التالية بدلالة  $\ln 2$  و  $\ln 5$ .

$\ln 6,25 ; \ln \frac{16}{25} ; \ln 500$

$\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100}$

4 في كل حالة من الحالات التالية، عين العدد

الطبيعي n حيث :  $2^n \leq 10^3 ; \left(\frac{1}{4}\right)^n \leq 10^{-2}$

$1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \geq 0,3 ; \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \leq 0,1$

معادلات

5 حل كل معادلة من المعادلات التالية في R

$\ln x = \frac{1}{2} ; \ln x = -2 ; \ln x = 2$

$[\ln x]^2 = 4 ; \ln x^2 = 4 ; \ln |x| = 2$

6 حل في R كل معادلة من المعادلات التالية :

$\ln(1-x)^2 = 4 \ln 2 ; \ln(1-x) = 2 \ln 3 - 3 \ln 2$

$\ln \sqrt{1-x} = \frac{1}{2} \ln 3 ; \ln \left(\frac{1}{1-x}\right) = -3 \ln 2$

7 حل كل معادلة من المعادلات التالية في R

$\ln(2x+7) = \ln(x-3)$

$\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3)$

$\ln(x-3) = \ln(x+7) - \ln(x+1)$

$\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7)$

$\ln\left(\frac{x+7}{x+1}\right) = \ln(x+3)$

$\frac{1}{2} \ln(1+x^2) = \ln(x+2)$

$\frac{1}{2} \ln(x-1) + \ln(x+1) = 2 + \ln \sqrt{1+x}$

8 P(x) كثير حدود حيث

$P(x) = 12x^3 + x^2 - 9x + 2$

1. عين الأعداد الحقيقية a, b, c حيث من أجل

$P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$  : كل عدد حقيقي x

حل في R المعادلة  $P(x) = 0$ .

2. استنتج حلول المعادلة

$12(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 9 \ln x + 2 = 0$

متراجحات

9 حل في R كل متراجحة من المتراجحات

التالية :  $\ln(3-x) \leq 0 ; \ln\left(\frac{x+1}{2x+1}\right) \geq 0$

$\ln(x+2) + \ln(3+x) > 0$

$\ln(x^2 - 4) > \ln(6x + 5)$

$\ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq 2 \ln 2$

10 حل في R كل متراجحة من المتراجحات

التالية :  $\ln(x+1) > \ln(4x-2) - \ln(x-1)$

$\ln(x^2 + 11x + 30) > \ln(x+14)$

$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \geq 0 ; \ln(x^2 - 2e^2) \leq \ln x + 1$

الجمال

11 حل كل جملة من الجملة التالية في  $R \times R$

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases} ; \begin{cases} x + y = 30 \\ \ln x + \ln y = 3 \ln 6 \end{cases}$

$\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln \frac{2}{3} \\ x + y = \frac{4}{3} \end{cases} ; \begin{cases} 2 \ln x + 3 \ln y = -2 \\ 3 \ln x + 5 \ln y = -4 \end{cases}$

$\begin{cases} \ln(x^2 - y^2) = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} ; \begin{cases} 5x + 4y = 12 \\ \ln(x-1) + \ln y = \ln 3 - \ln 5 \end{cases}$

النهايات

12 عين النهايات عند 0 و عند  $+\infty$  لكل من

الدوال التالية (عند وجودها) :

$$\begin{aligned} x \mapsto \sqrt{1 + (\ln x)^2} & : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \\ x \mapsto \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1} & : x \mapsto x - 2 \ln x \end{aligned}$$

13 عين النهايات عند  $+\infty$  لكل دالة من الدوال

التالية : (عند وجودها)  $x \mapsto x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

$$x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x} : x \mapsto \frac{\ln x}{x - \ln x}$$

$$x \mapsto x \ln \left(\frac{2x-3}{x}\right) : x \mapsto \frac{x^2 \ln x}{1+x}$$

$$x \mapsto x - (\ln x)^2 : x \mapsto \ln \left(\frac{1+2e^x}{e^{2x}-1}\right)$$

الدوال المشتقة

14 في كل حالة من الحالات التالية، عين

مجموعة قابلية اشتقاق للدالة  $f$  ثم عبّر عن  $f'(x)$

$$f(x) = \ln |7 - 2x| : f(x) = \ln(5x - 1)$$

$$f(x) = x^2 \ln x : f(x) = \ln \left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

$$f(x) = 3x + \ln(1 + e^{-2x}) : f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$f(x) = \ln(4x^2 - 3x - 1) : f(x) = \ln \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\right)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} : f(x) = x^2 \ln(1+x)$$

تعيين دوال أصلية

15  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = \frac{e^x - 2}{2e^x + 1}$$

اثبت أنه يوجد عدنان حقيقيان  $a, b$  حيث من

$$f(x) = a + \frac{be^x}{2e^x + 1} : x \text{ أجل كل عدد حقيقي}$$

عين دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

16  $g$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 4}$$

اثبت أنه يوجد عدنان حقيقيان  $a, b$  حيث

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$g(x) = ae^x + \frac{be^x}{e^x + 4}$$

عين الدالة الأصلية للدالة  $g$  التي تنعدم عند 0.

الدوال الأسية والدوال اللوغاريتم العشري

$$a = \frac{\sqrt[6]{6} (\sqrt[3]{2})^2 \sqrt{12}}{\sqrt[3]{3^4} \sqrt[3]{6^2}} \quad 17 \text{ بسط كتابة العدد}$$

بالرفع إلى القوة 6.

باستعمال القوي الناطقة.

$$18 \text{ بسط الأعداد التالية : } \sqrt[5]{\frac{1}{32}} : \sqrt[4]{81^3} : \sqrt[3]{8} \quad \sqrt[5]{\frac{1}{32}} : \sqrt[4]{81^3} : \sqrt[3]{8}$$

$$\frac{(\sqrt[3]{4})^2 \sqrt[4]{2}}{\sqrt[10]{4^3}} : \frac{\sqrt[5]{4^2} \sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{8}}$$

19 حل في  $\mathbb{R}$  كل معادلة من المعادلات التالية :

$$9^x - 3^{x+2} = \frac{3^5}{4} : 4^x + 3 \times 2^x + 10 = 0$$

$$x^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{x}\right)^x : 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$$

20 عين مجموعة تعريف و الدالة المشتقة  $f'$

لكل دالة من الدوال التالية :

$$f(x) = 2^x : f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

$$f(x) = x^x : f(x) = x^2 3^x$$

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x : f(x) = (\ln x)^x$$

21 عين نهايات الدالة  $f$  عند حدود مجموعة

تعريفها في كل حالة من الحالات التالية :

$$f(x) = x^x : f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

$$f(x) = \frac{x^x}{\ln x} : f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$



25  $f$  هي الدالة المعرفة  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = x - 4 + \ln(1 + e^{3x})$$

و  $(\mathbb{C})$  هو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. أثبت أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

2. احسب نهاية  $\ln(1 + e^{3x})$  عند  $-\infty$ .

3. استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathbb{C})$  ثم عين معادلة له.

4. بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ,

$$f(x) = 4x - 4 + \ln(1 + e^{3x})$$

5. ما هي نهاية  $\ln(1 + e^{3x})$  عند  $+\infty$  ؟

6. استنتج وجود مستقيم مقارب آخر للمنحنى  $(\mathbb{C})$  ثم عين معادلة له.

7. ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى  $(\mathbb{C})$  في نفس المعلم.

26  $f$  هي الدالة العددية المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} + 5}{e^{2x} - 2}\right)$$

و  $(\mathbb{C})$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. ما هي مجموعة التعريف  $E$  للدالة  $f$  ؟

2. ادرس تغيرات الدالة  $f$  و كذا نهاياتها عند حدود مجموعة التعريف  $E$ .

3. لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $E$  كما يلي

$$g(x) = f(x) - x$$

• عين نهاية  $g(x)$  لما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$ .

• ادرس إشارة  $g(x)$ .

• ماذا يمكن استنتاجه بالنسبة إلى المنحنى  $(\mathbb{C})$  ؟

4. ارسم المنحنى  $(\mathbb{C})$ .

22 عين دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$

في كل حالة من الحالات التالية :

$$I = ]0; +\infty[ \quad ; \quad f(x) = x^{\frac{2}{3}}$$

$$I = ]0; +\infty[ \quad ; \quad f(x) = x^2 \sqrt{x}$$

$$I = \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = 5^x$$

## مسائل

23 نعتبر الدالة  $f$  المعرفة كما يلي

$$f(x) = (x - 1) \ln(x^2)$$

و  $(\mathbb{C})$  المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. عين مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

2. عين نهايات  $f$  عند حدود مجموعة تعريفها.

3. أدرس تغيرات الدالة  $f$ .

4. حل المعادلة  $f(x) = 0$ .

5. ارسم المنحنى  $(\mathbb{C})$ .

24 نعتبر الدالة  $f$  المعرفة كما يلي

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

و  $(\mathbb{C})$  المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

1. عين  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

2. بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D_f$

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{و} \quad D_f \text{ ينتهي إلى } D_f$$

ما هو التفسير البياني الذي تعطيه لهذه النتيجة ؟

3. بين أن المنحنى  $(\mathbb{C})$  يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة يطلب تعيين معادلة لكل منها.

4. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

5. عين معادلة المماس  $(\Delta)$  للمنحنى  $(\mathbb{C})$  عند النقطة ذات الفاصلة  $e$ .

6. ارسم  $(\Delta)$  و  $(\mathbb{C})$  في المعلم السابق.

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard\_equation

### 1 - مبدأ الاستدلال بالتراجع

$P_n$  خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي  $n$ .

إذا كانت الخاصية  $P_0$  صحيحة و من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $P_n$  يستلزم  $P_{n+1}$  فإن من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $P_n$  صحيحة.

### • كيفية البرهان بالتراجع

للبرهان بالتراجع على أن خاصية  $P_n$  صحيحة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نتبع المراحل التالية :

1. نتحقق أن  $P_0$  صحيحة.
2. نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل عدد طبيعي  $n$  كفي و نبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة.
3. نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $P_n$  صحيحة.

**ملاحظة :** يمكن أن تكون الخاصية  $P_n$  معرفة من أجل  $n \geq n_0$ .

في هذه الحالة، نتحقق أن  $P_{n_0}$  صحيحة و نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل العدد الطبيعي  $n$  حيث  $n \geq n_0$  و نبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة. ثم نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq n_0$ ،  $P_n$  صحيحة.

### II - المتتاليات العددية

#### 1. توليد متتالية

1. 1. يمكن توليد متتالية عددية إذا كانت معرفة بحددها العام.

مثال :  $(v_n)$  متتالية معرفة بحددها العام  $v_n = n + 3$  للحصول على حد معين يكفي تعويض  $n$  بالعدد الطبيعي المناسب.

$$\text{لدينا } v_{10} = 10 + 3 = 13 \quad ; \quad v_{27} = 27 + 3 = 30$$

1. 2. يمكن توليد متتالية عددية إذا كانت معرفة بعلاقة تراجعية من الشكل  $u_{n+1} = f(u_n)$  حيث  $f$  هي الدالة المرفقة بالمتتالية  $(u_n)$ .

مثال : المتتالية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي  $u_0 = 2$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = u_n + 2$  هي متتالية معرفة بعلاقة تراجعية.

$$\text{لدينا } u_1 = 4 \quad ; \quad u_2 = 6 \quad ; \quad u_3 = 8 \quad ; \quad u_4 = 10$$

**ملاحظة 1 :** في المتتالية  $(v_n)$ ،  $v_{27}$  هو أحد حدودها، 27 هو دليله، أما رتبته فهي متعلقة بعدد الحدود التي تسبقه.

رتبة الحد  $v_k$  بالنسبة إلى الحد  $v_b$  حيث  $b < k$  هي  $b - k + 1$ .

رتبة الحد  $v_{27}$  بالنسبة إلى الحد  $v_0$  هي  $27 - 0 + 1$  أي 28.

رتبة الحد  $v_{27}$  بالنسبة إلى الحد  $v_1$  هي  $27 - 1 + 1$  أي 27.

رتبة الحد  $v_{27}$  بالنسبة إلى الحد  $v_5$  هي  $27 - 5 + 1$  أي 23.



**ملاحظة 2 :** المتتالية  $(v_n)$  المعرفة بحددها العام  $v_n = n + 3$  هي من الشكل  $v_n = f(n)$

حيث  $f$  هي الدالة المرفقة بالمتتالية  $(v_n)$  و المعرفة كما يلي  $f(x) = x + 3$ .

المتتالية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي  $u_0 = 2$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = u_n + 2$

هي من الشكل  $u_{n+1} = f(u_n)$  حيث  $f$  هي الدالة المرفقة بالمتتالية  $(u_n)$

و المعرفة كما يلي :  $f(x) = x + 2$ .

1.3. المتتاليات الحسابية و المتتاليات الهندسية

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$ .

| المتتاليات الهندسية                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | المتتاليات الحسابية                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>تعريف :</b> <math>(u_n)</math> متتالية هندسية حدها الأول <math>u_0</math> إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي <math>q</math> بحيث من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> : <math>u_{n+1} = qu_n</math> . <math>q</math> يسمى أساس المتتالية الهندسية <math>(u_n)</math>.</p>                                                                                                                                                                                                             | <p><b>تعريف :</b> <math>(u_n)</math> متتالية حسابية حدها الأول <math>u_0</math> إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي <math>r</math> بحيث من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> : <math>u_{n+1} = u_n + r</math> . <math>r</math> يسمى أساس المتتالية الحسابية <math>(u_n)</math>.</p>                                                                                                                                                                                              |
| <p><b>الحد العام لمتتالية هندسية</b></p> <p><math>(u_n)</math> متتالية هندسية حدها الأول <math>u_0</math> و أساسها <math>q</math> الحد العام <math>u_n</math> معرف كما يلي :<br/>من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> : <math>u_n = u_0 \times q^n</math> .</p>                                                                                                                                                                                                                     | <p><b>الحد العام لمتتالية حسابية</b></p> <p><math>(u_n)</math> متتالية حسابية حدها الأول <math>u_0</math> و أساسها <math>r</math> الحد العام <math>u_n</math> معرف كما يلي :<br/>من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> : <math>u_n = u_0 + nr</math> .</p>                                                                                                                                                                                                               |
| <p><b>حساب المجموع <math>S</math> حيث <math>S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}</math></b></p> <p><math>(u_n)</math> متتالية هندسية حدها الأول <math>u_0</math> و أساسها <math>q</math> .<br/>إذا كان <math>q = 1</math> فإن<br/><math>S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = nu_0</math><br/>إذا كان <math>q \neq 1</math> فإن<br/><math>S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \left( \frac{1 - q^n}{1 - q} \right)</math><br/>حيث <math>n</math> هو عدد حدود المجموع <math>S</math>.</p> | <p><b>حساب المجموع <math>S</math> حيث <math>S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}</math></b></p> <p><math>(u_n)</math> متتالية حسابية حدها الأول <math>u_0</math> و أساسها <math>r</math><br/><math>S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = n \left( \frac{u_0 + u_{n-1}}{2} \right)</math><br/>حيث <math>n</math> هو عدد حدود المجموع <math>S</math>.<br/><b>ملاحظة :</b> يمكن كتابة المجموع <math>S</math> على الشكل التالي :<br/><math>S = nu_0 + \frac{n(n-1)r}{2}</math></p> |
| <p><b>ملاحظة :</b> إذا كان <math>q = 1</math> فإن كل حدود المتتالية الهندسية مساوية للحد <math>u_0</math> .<br/>إذا كان <math>q = 0</math> فإن كل الحدود بدءا من <math>u_1</math> منعدمة .<br/>إذا كان <math>q = -1</math> فإن من أجل كل عدد طبيعي <math>n</math> ، <math> u_n  =  u_0 </math></p>                                                                                                                                                                                | <p><b>ملاحظة :</b> إذا كان <math>r = 1</math> فإن كل حدود المتتالية الحسابية مساوية للحد <math>u_0</math> .</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |

## 2. خواص المتتاليات

### 2.1. اتجاه تغير متتالية عددية

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$ .

•  $(u_n)$  متزايدة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} \geq u_n$ .

•  $(u_n)$  متناقصة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} \leq u_n$ .

•  $(u_n)$  ثابتة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = u_n$ .

• إذا كانت  $(u_n)$  متزايدة أو متناقصة نقول إنها رتيبة.

**ملاحظة 1 :** ندرس بنفس الطريقة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  إذا كانت معرفة على جزء من  $\mathbb{N}$ .

**ملاحظة 2 :** نستنتج اتجاه تغير متتالية حسابية  $(u_n)$  حسب إشارة أساسها  $r$ .

| $r > 0$               | $r < 0$               | $r = 0$       |
|-----------------------|-----------------------|---------------|
| $(u_n)$ متزايدة تماما | $(u_n)$ متناقصة تماما | $(u_n)$ ثابتة |

و نستنتج اتجاه تغير متتالية هندسية  $(u_n)$  حسب إشارة حدها الأول  $u_0$  و قيمة أساسها  $q$ .

| $0 < q < 1$                        | $q = 1$       | $q > 1$               |
|------------------------------------|---------------|-----------------------|
| $u_0 > 0$<br>$(u_n)$ متناقصة تماما | $(u_n)$ ثابتة | $(u_n)$ متزايدة تماما |
| $u_0 < 0$<br>$(u_n)$ متزايدة تماما |               | $(u_n)$ متناقصة تماما |

• إذا كان  $q < 0$  فإن المتتالية الهندسية  $(u_n)$  ليست رتيبة.

• إذا كان  $q = 0$  فإن المتتالية الهندسية  $(u_n)$  ثابتة بدءا من  $u_1$ .

### 2.2. المتتاليات المحدودة

تعريف

$(u_n)$  متتالية عددية.

• المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي  $M$  حيث

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \leq M$ .

• المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأسفل إذا وجد عدد حقيقي  $m$  حيث

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \geq m$ .

• المتتالية  $(u_n)$  محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى و من الأسفل.

## 2.3. نهاية متتالية عددية

$(u_n)$  متتالية عددية و  $l$  عدد حقيقي.

تعريف

العدد الحقيقي  $l$  هو نهاية المتتالية  $(u_n)$  عندما يؤول  $n$  إلى  $+\infty$  إذا وفقط إذا كان من أجل كل مجال  $[\alpha; \beta]$  يوجد عدد طبيعي  $p$  بحيث مهما يكن العدد الطبيعي  $n$  يحقق  $n \geq p$  ينتمي  $u_n$  إلى المجال  $[\alpha; \beta]$ . نكتب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .

ملاحظات

- إذا كانت نهاية المتتالية  $(u_n)$  عندما يؤول  $n$  إلى  $+\infty$  عددا حقيقيا  $l$  نقول إن  $(u_n)$  متقاربة.
- إذا كانت نهايتها  $+\infty$  أو  $-\infty$  أو غير موجودة فإن  $(u_n)$  غير متقاربة و نقول عنها إنها متباعدة.

مبرهنة

إذا كانت متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة.

## 2.4. مبرهنات حول نهايات متتاليات

مبرهنة

$(u_n)$  متتالية معرفة بعلاقة من الشكل  $u_n = f(n)$  حيث  $f$  دالة معرفة على مجال  $[\alpha; +\infty[$ .  $\alpha$  عدد حقيقي.  $l$  هو عدد حقيقي أو  $+\infty$  أو  $-\infty$ .  
إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .

مبرهنة

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  و  $l \in I$  : متتالية معرفة بعلاقة من الشكل  $u_{n+1} = f(u_n)$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \in I$ .  
إذا كانت  $(u_n)$  متقاربة نحو  $l$  و  $f$  مستمرة عند  $l$  فإن  $l = f(l)$ .

المبرهنات المتعلقة بحساب نهايات متتاليات

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتالتان عدديتان :  $l$  و  $l'$  عددان حقيقيان.

نهاية مجموع متتاليتين

|                |           |           |           |           |          |                                                   |
|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|---------------------------------------------------|
| $+\infty$      | $-\infty$ | $+\infty$ | $l$       | $l$       | $l$      | إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ هي    |
| $-\infty$      | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $l'$     | و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ هي           |
| حالة عدم تعيين | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $l + l'$ | فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$ هي |



• نهاية جدا . متتاليتين

|                |           |           |           |           |           |           |           |        |                                               |
|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------|-----------------------------------------------|
| 0              | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $l < 0$   | $l < 0$   | $l > 0$   | $l > 0$   | $l$    | إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ هي |
| $\infty$       | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $l'$   | و $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ هي        |
| حالة عدم تعيين | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $l l'$ | فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n$ هي  |

• نهاية حاصل قسمة متتاليتين

|                |           |           |           |           |          |                |                                                      |
|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----------|----------------|------------------------------------------------------|
| $\infty$       | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $l$      | $l$            | إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ هي        |
| $\infty$       | $l' < 0$  | $l' > 0$  | $l' < 0$  | $l' > 0$  | $\infty$ | $l' \neq 0$    | و $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ هي               |
| حالة عدم تعيين | $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | 0        | $\frac{l}{l'}$ | فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$ هي |

|                |                       |                       |                       |                       |                                                      |
|----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------------------------------------|
| 0              | $l' < 0$ أو $-\infty$ | $l' < 0$ أو $-\infty$ | $l' > 0$ أو $+\infty$ | $l' > 0$ أو $+\infty$ | إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ هي        |
| 0              | 0 بقيم سالبة          | 0 بقيم موجبة          | 0 بقيم سالبة          | 0 بقيم موجبة          | و $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ هي               |
| حالة عدم تعيين | $+\infty$             | $-\infty$             | $-\infty$             | $+\infty$             | فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$ هي |

ملاحظة : توجد حالات، لا يمكن النص فيها عن النتيجة بتطبيق المبرهنات المتعلقة بمجموع متتاليتين، أو جدا . متتاليتين أو حاصل قسمة متتاليتين. تسمى حالات عدم التعيين وهي من الشكل

$$+\infty - \infty ; 0 \times \infty ; \frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty}$$

## 2. 5. النتائج المتعلقة بالحصص والمقارنة

### مبرهنة 1

• إذا كانت متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة.

• إذا كانت متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

### مبرهنة 2

• إذا كانت متتالية متقاربة فإنها محدودة.

ملاحظة : العكس غير صحيح.

### مبرهنة 3

$(u_n)$ ،  $(v_n)$ ،  $(w_n)$  متتاليات عددية،  $l$  عدد حقيقي.

| إذا كان (بدا من مرتبة معينة) | و كان ...                                                                 | فإن ...                                      |
|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| $u_n \leq w_n$               | $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$                              | $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$ |
| $v_n \leq u_n$               | $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$                              | $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ |
| $ v_n - l  \leq u_n$         | $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$                                    | $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$       |
| $v_n \leq u_n \leq w_n$      | $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ | $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$       |

### 2، 6. نهاية متتالية هندسية

#### مبرهنة

$(u_n)$  متتالية هندسية حدها الأول  $u_0$  وأساسها  $q$ .

إذا كان  $q > 1$  و  $u_0 > 0$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

إذا كان  $q > 1$  و  $u_0 < 0$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

إذا كان  $-1 < q < 1$  فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

إذا كان  $q \leq -1$  فإن نهاية  $(u_n)$  غير موجودة.

#### ملاحظات

إذا كانت المتتالية  $(u_n)$  متزايدة و غير محدودة من الأعلى فإنها متباعدة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

إذا كانت المتتالية  $(u_n)$  متناقصة و غير محدودة من الأسفل فإنها متباعدة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

### III - المتتاليتان المتجاورتان

#### تعريف

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان عدديتان.

نقول عن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  إنهما متجاورتان إذا تحقق ما يلي :

إحدى المتتاليتين متزايدة و الأخرى متناقصة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$ .

#### مبرهنة 1

إذا كانت متتاليتان متجاورتين فكل منهما متقاربة و لهما نفس النهاية.

#### مبرهنة 2

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان متجاورتان و نهايتهما  $l$ .

إذا كانت  $(u_n)$  متزايدة و  $(v_n)$  متناقصة فإن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \leq l \leq v_n$ .

إذا كانت  $(u_n)$  متناقصة و  $(v_n)$  متزايدة فإن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n \leq l \leq u_n$ .

# 1 اثبات خاصية بالتراجع

## تقرين 1

( $u_n$ ) متتالية معرفة كما يلي  $u_0 = 1$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$   
 • أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 2$ .

## حل

- لتكن  $P_n$  الخاصية المعرفة على  $N$  كما يلي :  $0 < u_n < 2$ .
- $u_0 = 1$  إذن  $0 < u_0 < 2$  بالتالي  $P_0$  صحيحة.
- ليكن  $n$  عددا طبيعيا. نفرض أن  $P_n$  صحيحة أي  $0 < u_n < 2$ .
- نبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة أي  $0 < u_{n+1} < 2$ .
- لدينا  $0 < u_n < 2$  إذن  $2 < u_n + 2 < 4$ .
- ينتج أن  $\sqrt{2} < \sqrt{u_n + 2} < 2$  وبالتالي  $0 < \sqrt{u_n + 2} < 2$ .
- نستنتج أن  $0 < u_{n+1} < 2$  أي  $P_{n+1}$  صحيحة.
- إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ، إذا كانت  $P_n$  صحيحة فإن  $P_{n+1}$  صحيحة.
- وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $P_n$  صحيحة.
- ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 2$ .

## تقرين 2

• أثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  :  $n! \geq 2^{n-1}$   
 • علما أن  $1! = 1$  و من أجل  $n \geq 2$  :  $n! = n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1$ .

## حل

- $P_n$  هي الخاصية المعرفة من أجل  $n \geq 1$  كما يلي :  $n! \geq 2^{n-1}$ .
- لدينا من أجل  $n = 1$  :  $2^{1-1} = 2^0 = 1$  و  $1! = 1$ ، إذن  $1! \geq 2^{1-1}$  أي  $P_1$  صحيحة.
- ليكن  $n$  عددا طبيعيا حيث  $n \geq 1$ . نفرض أن  $P_n$  صحيحة أي  $n! \geq 2^{n-1}$ .
- نبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة : أي  $(n+1)! \geq 2^n$ .
- نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  :  $n+1 \geq 2$ .
- لدينا  $n! \geq 2^{n-1}$  و  $n+1 \geq 2$  إذن  $(n+1)n! \geq 2^{n-1} \times 2$  أي  $(n+1)! \geq 2^n$ .
- وبالتالي  $P_{n+1}$  صحيحة.
- نستنتج أن من أجل عدد طبيعي  $n \geq 1$ ، إذا كانت  $P_n$  صحيحة فإن  $P_{n+1}$  صحيحة.
- وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  :  $P_n$  صحيحة.
- إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  :  $n! \geq 2^{n-1}$ .



### تقرين 3

• أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  ،  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

#### حل

نثبت ذلك بالتراجع.

• نضع  $P_n$  الخاصية المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

• لدينا من أجل  $n=1$  :  $\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

إذن من أجل  $n=1$  :  $\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{1+1}$  و بالتالي  $P_1$  صحيحة.

• ليكن  $n$  عددا طبيعيا حيث  $n \geq 1$  نفرض أن  $P_n$  صحيحة

أي من أجل عدد طبيعي  $n \geq 1$  :  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

و نبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة أي  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$

• حسب الفرض لدينا  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

\* ينتج أن  $\left( \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

لدينا  $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$

و بالتالي  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$

إذن من أجل العدد الطبيعي  $n \geq 1$  إذا كان  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

فإن  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$

نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 1$  ،  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

### 2 استعمال التمثيل البياني لتخمين سلوك ونهاية متتالية عددية

#### تقرين 1

• مثل بيانيا كلا من المتتاليات  $(u_n)$  المعرفة كما يلي :

$$1. \quad u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad \text{و} \quad u_0 = 0$$

$$2. \quad u_{n+1} = u_n^2 + 1 \quad \text{و} \quad u_0 = 0$$

$$3. \quad u_{n+1} = \frac{3+u_n}{u_n} \quad \text{و} \quad u_0 = 1$$

استعمل تمثيل كل منها لتخمين سلوكها ونهايتها.

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  $(\Delta)$  هو المستقيم الذي معادلته  $y = x$ .

1. تمثيل المتتالية  $(u_n)$

حيث  $u_0 = 0$  و  $u_{n+1} = 2u_n + 1$

$f$  هي الدالة المرفقة بالمتتالية  $(u_n)$  و المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  كما يلي :

$f(x) = 2x + 1$  و  $(\mathcal{C})$  تمثيلها البياني.

مجموعة النقط  $M_n(u_n; u_{n+1})$  حيث  $u_{n+1} = f(u_n)$

هي التمثيل البياني للمتتالية  $(u_n)$ .

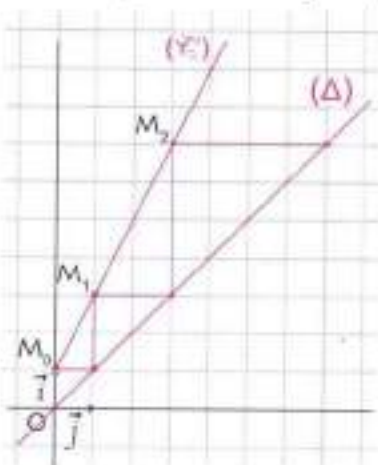
النقط  $M_0(u_0; u_1), M_1(u_1; u_2), M_2(u_2; u_3), \dots$

هي نقط من التمثيل البياني للمتتالية.

$(\mathcal{C})$  هو المستقيم الذي معادلته  $y = 2x + 1$

النقط  $M_0, M_1, M_2, \dots$  هي نقط من هذا المستقيم.

**التخمين:** المتتالية  $(u_n)$  متزايدة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$



2. تمثيل المتتالية  $(u_n)$  حيث  $u_0 = 0$  و  $u_{n+1} = u_n^2 + 1$

$f$  هي الدالة المرفقة بالمتتالية  $(u_n)$  و  $(\mathcal{C})$  التمثيل البياني

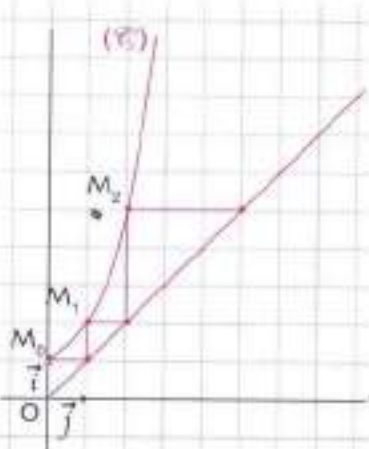
للدالة  $f$  المعرفة على  $[0; +\infty[$  بـ  $f(x) = x^2 + 1$

النقط  $M_0(u_0; u_1), M_1(u_1; u_2), M_2(u_2; u_3), \dots$

نقط من التمثيل البياني للمتتالية  $(u_n)$ .

المنحنى  $(\mathcal{C})$  و هو فرع لقطع مكافئ يشمل النقط  $M_0, M_1, M_2, \dots$

**التخمين:** المتتالية  $(u_n)$  متزايدة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$



3. تمثيل المتتالية  $(u_n)$  حيث  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = \frac{3+u_n}{u_n}$

$f$  هي الدالة المرفقة بالمتتالية  $(u_n)$  و  $(\mathcal{C})$  هو التمثيل البياني

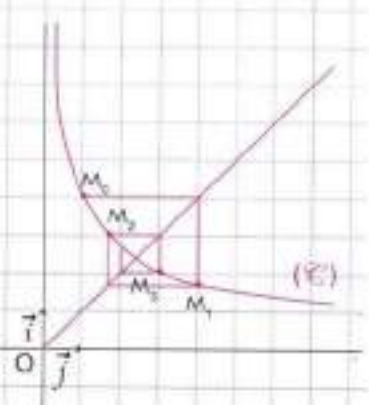
للدالة  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ  $f(x) = \frac{3+x}{x}$

هي نقط من التمثيل البياني للمتتالية  $(u_n)$ .

المنحنى  $(\mathcal{C})$  يشمل النقط  $M_0, M_1, M_2, \dots$  و هو فرع قطع زائد.

**التخمين:** المتتالية  $(u_n)$  ليست رتيبة. المتتالية  $(u_n)$  متقاربة

و نهايتها هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم  $(\Delta)$  مع  $(\mathcal{C})$ .



### تمرين 1

$$u_{n+1} = \frac{n+3}{2n-1} \text{ كما يلي } \mathbb{N}^* \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N}^*$$

1. برهن أن المتتالية  $(u_n)$  محدودة.
2. حدد اتجاه تغيراتها ثم عين  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

### حل

1. المتتالية  $(u_n)$  معرفة بعلاقة من الشكل  $u_n = f(n)$  حيث  $f$  هي الدالة المعرفة

$$\text{على المجال } [1; +\infty[ \text{ كما يلي : } f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$$

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $[1; +\infty[$  و دالتها المشتقة هي  $f'$  حيث  $f'(x) = \frac{-7}{(2x-1)^2}$

لدينا  $f'(x) < 0$  على المجال  $[1; +\infty[$  و بالتالي  $f$  متناقصة على  $[1; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$  يكون كالآتي :

| x       | 1 | $+\infty$     |
|---------|---|---------------|
| $f'(x)$ | - |               |
| $f(x)$  | 4 | $\frac{1}{2}$ |

من جدول تغيرات  $f$  ينتج أن على المجال  $[1; +\infty[$

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 4 \text{ و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير منعدم}$$

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 4$$

أي المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأسفل بالعدد  $\frac{1}{2}$  و من الأعلى بالعدد 4.

2. الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $[1; +\infty[$  إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم

$$f(n+1) \leq f(n) \text{ أي من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير منعدم، } u_{n+1} \leq u_n$$

و بالتالي المتتالية  $(u_n)$  متناقصة على  $\mathbb{N}^*$ .

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \frac{1}{2} \text{ إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

### تمرين 2

لتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة كما يلي :  $u_0 = 7$  و  $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} - 3$

1. لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة كما يلي :  $v_n = u_n + k$  :  $k \in \mathbb{R}$ . عين  $k$  بحيث تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية. حدد عندئذ أساسها و حدها الأول.
2. عبر عن  $u_n$  و  $v_n$  بدلالة  $n$ .
3. عين  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .



1. من المساواة  $v_n = u_n + k$  ينتج أن  $u_n = v_n - k$ . تعيين  $v_{n+1}$  بدلالة  $v_n$ .  
 لدينا  $v_{n+1} = u_{n+1} + k = \left(\frac{u_n}{2} - 3\right) + k = \frac{1}{2}(v_n - k) - 3 + k = \frac{1}{2}v_n + \frac{k}{2} - 3$   
 وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{k}{2} - 3$   
 تكون  $(v_n)$  متتالية هندسية إذا كان  $\frac{1}{2}k - 3 = 0$  أي  $k = 6$ .  
 وبالتالي من أجل  $k = 6$  المتتالية  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  وحدها الأول  $v_0$   
 حيث  $v_0 = u_0 + 6$  أي  $v_0 = 13$ .  
 1.  $(v_n)$  متتالية هندسية إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$   
 أي من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = 13 \left(\frac{1}{2}\right)^n$   
 ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = 13 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$   
 3. لدينا  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  وبالتالي  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -6$

### تمرين 3

- لتكن المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي :  $u_n = \frac{\sin n + (-1)^n}{n}$   
 1. أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  محدودة.  
 2. أدرس اتجاه تغير  $(u_n)$  ثم عين  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

1. نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم ،  $-1 \leq \sin n \leq 1$  و  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$   
 إذن  $-2 \leq \sin n + (-1)^n \leq 2$  ينتج أن  $-\frac{2}{n} \leq \frac{\sin n + (-1)^n}{n} \leq \frac{2}{n}$   
 بما أن  $n \geq 1$  فإن  $0 < \frac{1}{n} \leq 1$  و  $0 < \frac{2}{n} \leq 2$  و  $0 > -\frac{2}{n} \geq -2$   
 وبالتالي  $-2 \leq -\frac{2}{n} \leq \frac{\sin n + (-1)^n}{n} \leq \frac{2}{n} \leq 2$   
 إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم ،  $-2 \leq u_n \leq 2$ . ينتج أن المتتالية  $(u_n)$  محدودة  
 من الأعلى بالعدد 2 و من الأسفل بالعدد -2. إذن المتتالية  $(u_n)$  محدودة.  
 2. من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم ،  $-1 \leq \sin n \leq 1$  و  $-1 + (-1)^n \leq \sin n + (-1)^n \leq 1 + (-1)^n$   
 إذا كان  $n$  زوجيا فإن  $n+1$  فردي وبالتالي  $0 \leq u_n \leq \frac{2}{n}$  و  $-\frac{2}{n} \leq u_{n+1} \leq 0$   
 إذا كان  $n$  فرديا فإن  $n+1$  زوجي وبالتالي  $-\frac{2}{n} \leq u_n \leq 0$  و  $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{n}$

ينتج أن إذا كان  $n$  زوجيا فإن  $u_{n+1} \leq u_n$

إذا كان  $n$  فرديا فإن  $u_{n+1} \geq u_n$

وبالتالي  $(u_n)$  ليست متزايدة و ليست متناقصة على  $\mathbb{N}^*$ .

أي المتتالية  $(u_n)$  ليست رتبة على  $\mathbb{N}^*$ .

• بما أن  $-\frac{2}{n} \leq u_n \leq \frac{2}{n}$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{2}{n} = 0$  فإن  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

#### 4 معرفة واستعمال مفهوم المتتاليتين المتجاورتين

##### تمرين 1

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $u_n = -\frac{1}{n+1}$  و  $v_n = \frac{5}{2n+3}$

هل المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان ؟

##### حل

• دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} = \frac{-n-1+n+2}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

لدينا

$$u_{n+1} - u_n > 0 \quad : n \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \quad \text{إذن } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة على  $\mathbb{N}$ .

• دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(v_n)$ .

$$v_{n+1} - v_n = \frac{5}{2n+2+3} - \frac{5}{2n+3} = \frac{10n+15-10n-25}{(2n+5)(2n+3)} = \frac{-10}{(2n+5)(2n+3)}$$

لدينا

$$v_{n+1} - v_n < 0 \quad : n \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \quad \text{إذن } v_{n+1} - v_n = \frac{-10}{(2n+5)(2n+3)}$$

وبالتالي المتتالية  $(v_n)$  متناقصة على  $\mathbb{N}$ .

• حساب  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n)$ .

$$v_n - u_n = \frac{7n+8}{(2n+3)(n+1)} = \frac{7n+8}{2n^2+5n+3}$$

لدينا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0 \quad \text{إذن} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n+8}{2n^2+5n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{2n} = 0$$

لدينا  $(u_n)$  متزايدة و  $(v_n)$  متناقصة و  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$

إذن المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان.

## تمرين 2

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$  و  $v_n = \frac{n}{n+2}$ .  
• أثبت أن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  غير متجاورتين.

### حل

• دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .

$$\text{لدينا } u_{n+1} - u_n = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

$$\text{إذن } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \quad \text{نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي } n$$

و بالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة على  $\mathbb{N}$ .

• دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(v_n)$ .

$$\text{لدينا } v_{n+1} - v_n = \frac{n+1}{n+3} - \frac{n}{n+2} = \frac{2}{(n+3)(n+2)}$$

$$\text{إذن } v_{n+1} - v_n = \frac{2}{(n+3)(n+2)} > 0 \quad \text{نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي } n$$

و بالتالي المتتالية  $(v_n)$  متزايدة على  $\mathbb{N}$ .

المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  لهما نفس اتجاه التغير إذن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  غير متجاورتين.

## تمرين 3

$(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$  و  $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ .

1. بين أن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان.

2. عين حصرا لنهايتهما من أجل  $n = 8$ .

### حل

1. دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .

$$\text{لدينا } u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$$

• حساب  $u_{n+1} - u_n$ .

$$\text{لدينا } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \quad \text{إذن من أجل كل عدد } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

ينتج أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة على  $\mathbb{N}^*$ .

• حساب  $v_{n+1} - v_n$ .

$$\text{لدينا } v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$$



نلاحظ أن من أجل كل عدد  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :  $\frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0$ .

إذن المتتالية  $(v_n)$  متناقصة على  $\mathbb{N}^*$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$$
 لدينا

بما أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة و المتتالية  $(v_n)$  متناقصة على  $\mathbb{N}^*$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$  فإن المتتاليتين  $(v_n)$  و  $(u_n)$  متجاورتان.

2. بما أن المتتاليتين  $(v_n)$  و  $(u_n)$  متجاورتان فإن كلا منهما متقاربة ولهما نفس النهاية  $\ell$

التي تحقق من أجل كل عدد طبيعي  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  :  $u_n \leq \ell \leq v_n$ .

لنحصل على الحصر التالي حسب قيم العدد الطبيعي  $n$  من  $\mathbb{N}^*$ .

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!} \quad : \mathbb{N}^* \text{ من } n \text{ عدد طبيعي}$$

تعيين حصر من أجل  $n=8$  لنهاية  $(u_n)$  باستعمال المتباينة المضغوطة  $u_n \leq \ell \leq v_n$

$$\frac{1}{n!} \text{ قيم العدد الحقيقي}$$

$$0,0416666 \leq \frac{1}{4!} \leq 0,0416667$$

$$0,0083333 \leq \frac{1}{5!} \leq 0,0083334$$

$$0,0013888 \leq \frac{1}{6!} \leq 0,0013889$$

$$0,0001984 \leq \frac{1}{7!} \leq 0,0001985$$

$$0,0000248 \leq \frac{1}{8!} \leq 0,0000249$$

$$1 \leq 1 \leq 1 \quad \text{لدينا}$$

$$1 \leq \frac{1}{1!} \leq 1$$

$$0,5 \leq \frac{1}{2!} \leq 0,5$$

$$0,1666666 \leq \frac{1}{3!} \leq 0,1666667$$

$$2,7182785 \leq \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \leq 2,7182791$$
 نجد

$$2,7182785 \leq \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k!} \leq 2,7182791 \quad \text{أي}$$

$$2,7182785 \leq u_n \leq 2,7182791 \quad \text{و بالتالي } n=8$$

$$2,7182785 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq 2,7182791$$
 ينتج أن

$$2,7182785 \leq \ell \leq 2,7182791 \quad \text{إذن}$$

**ملاحظة :** يمكن تعيين حصر للعدد  $\ell$  من أجل  $n$  أكبر، و تقريب  $\ell$  من  $e$  أساس اللوغاريتم النيبيري.

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} \quad : \quad u_0 = -1 \quad \text{و من أجل كل عدد طبيعي } n$$

1. احسب الحدود  $u_1, u_2, u_3$ .

2. برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم :  $u_n > 0$ .

3. أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأعلى بالعدد  $\sqrt{3}$ .

4. أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .

5. احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

## حل

1. حساب  $u_1, u_2, u_3$ .

$$\text{لدينا } u_0 = -1 : u_1 = \frac{3 + 2u_0}{2 + u_0} = \frac{3 - 2}{2 - 1} = 1 \quad \text{أي } u_1 = 1$$

$$u_2 = \frac{3 + 2}{2 + 1} = \frac{5}{3} \quad \text{أي } u_2 = \frac{5}{3}$$

$$u_3 = \frac{3 + \frac{10}{3}}{2 + \frac{5}{3}} = \frac{19}{11} \quad \text{أي } u_3 = \frac{19}{11}$$

2. نبرهن أن من أجل كل عدد  $n$  طبيعي غير منعدم :  $u_n > 0$ .

من أجل ذلك نطبق الإستدلال بالتراجع.

لتكن  $P_n$  الخاصية المعرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي :  $u_n > 0$ .

من أجل  $n = 1$  :  $u_1 = 1$  إذن  $u_1 > 0$ .

إذن الخاصية  $P_n$  صحيحة من أجل  $n = 1$ .

نفرض أن  $P_n$  صحيحة من أجل العدد الطبيعي غير المنعدم  $n$  : أي  $u_n > 0$ .

نبرهن أن  $P_{n+1}$  صحيحة أي  $u_{n+1} > 0$ .

نعلم أن  $u_n > 0$  إذن  $3 + 2u_n > 0$  و  $2 + u_n > 0$  و بالتالي  $\frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} > 0$ .

ينتج أن  $u_{n+1} > 0$  أي  $P_{n+1}$  صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير منعدم  $n$  :  $P_n$  صحيحة.

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم :  $u_n > 0$ .

3. إثبات أن المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأعلى بالعدد  $\sqrt{3}$ .

من أجل ذلك نثبت أن من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n \leq \sqrt{3}$ .

نضع  $P'_n$  الخاصية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $u_n \leq \sqrt{3}$ .

من أجل  $n = 0 : -1 \leq \sqrt{3}$  إذن  $u_0 \leq \sqrt{3}$  أي  $P'_n$  صحيحة من أجل  $n = 0$ .

إذن الخاصية  $P'_n$  صحيحة من أجل  $n = 0$ .

نفرض أن  $P'_n$  صحيحة من أجل العدد الطبيعي  $n$  و نبرهن أن  $P'_{n+1}$  صحيحة أي  $u_{n+1} \leq \sqrt{3}$ .

من أجل ذلك يكفي أن نبرهن أن  $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq 0$ .

$$u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} - \sqrt{3} = \frac{(3 - 2\sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})u_n}{2 + u_n} = \frac{(2 - \sqrt{3})(u_n - \sqrt{3})}{2 + u_n} \quad \text{لدينا}$$

نعلم أن  $2 - \sqrt{3} > 0$  و  $u_n - \sqrt{3} \leq 0$  و  $2 + u_n > 0$  إذن  $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq 0$ .

وبالتالي  $u_{n+1} \leq \sqrt{3}$ . نستنتج أن  $P'_n$  صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n \leq \sqrt{3}$ .

4. دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} - u_n = \frac{3 - u_n^2}{2 + u_n} = \frac{(\sqrt{3} - u_n)(\sqrt{3} + u_n)}{2 + u_n} \quad \text{ندرس إشارة } u_{n+1} - u_n.$$

نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم،  $u_n > 0$  و  $u_n \leq \sqrt{3}$ .

إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم :  $\frac{3 - u_n^2}{2 + u_n} \geq 0$ .

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم :  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .

من أجل  $n = 0$  : لدينا  $u_1 - u_0 = 1 - (-1) = 2$  أي  $u_1 - u_0 = 2$  إذن  $u_1 - u_0 > 2$ .

ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_{n+1} - u_n \geq 0$ .

وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة على  $\mathbb{N}$ .

5. حساب  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

نعلم أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة على  $\mathbb{N}$  ومحدودة من الأعلى بالعدد  $\sqrt{3}$ ، إذن  $(u_n)$  متقاربة.

الدالة  $f$  المرفقة بالمتتالية  $(u_n)$  هي الدالة المستمرة على  $]0; +\infty[$  حيث  $f(x) = \frac{3 + 2x}{2 + x}$ .

نضع  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ . نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي غير منعدم :  $u_n > 0$ .

نبحث عن  $l$  في المجال  $]0; +\infty[$  حيث  $l = f(l)$ .

لدينا  $l = f(l)$  يعني  $l = \frac{3 + 2l}{2 + l}$  أي  $l^2 = 3$ . ينتج أن  $l = \sqrt{3}$  إذن  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sqrt{3}$ .



الاستدلال بالتراجع

1 (1) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \quad \text{و} \quad u_0 = 2$$

1. برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 3$

2. برهن أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة.

2 (2) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad \text{و} \quad u_0 = 1$$

1. برهن أنه مهما يكن  $n$  من  $\mathbb{N}$  :  $u_n < 2$

2. برهن أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة.

3 (3) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5} \quad \text{و} \quad u_0 = 9$$

1. برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n > 3$

2. برهن أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة.

4 (4) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$u_{n+1} = 2u_n - 3 \quad \text{و} \quad u_0 = 2$$

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = 3 - 2^n$

5 (5) المتتالية المعرفة كما يلي :

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{4 + u_n} \quad \text{و} \quad u_0 = 1$$

1. أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

2. ما هو اتجاه تغير الدالة  $x \mapsto \frac{1+x}{4+x}$

على المجال  $[0; 1]$  ؟

3. ما هو اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ؟

6 (6) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$

غير منعدم :  $1 - 4^n$  مضاعف 3.

7 (7) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$

$7 \times 3^{5n} + 4$  يقبل القسمة على 11.

8 (8) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$

$1 - 3n - 4^n$  يقبل القسمة على 9.

9 (9) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$

$n^3 - n$  يقبل القسمة على 3.

10 (10)  $a$  عدد حقيقي موجب تماما. برهن أن من أجل

كل عدد طبيعي  $n$  :  $(1+a)^n \geq 1 + na$ .

11 (11) ليكن العدد  $S_n$  حيث

$$S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

برهن بالتراجع أن مهما يكن العدد الطبيعي  $n$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

12 (12) ليكن العدد  $S_n$  حيث

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

برهن بالتراجع أن مهما يكن العدد الطبيعي  $n$

$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

توليد متتاليات

13 (13) المتتالية المعرفة كما يلي :

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} \quad \text{و} \quad u_1 = 2 : u_0 = 1$$

• عبر عن  $u_n$  بدلالة  $n$ .

• ادرس سلوك المتتالية  $(u_n)$ .

• في التمارين 14، 15، 16، 17 يطلب تمثيل

المتتالية  $(u_n)$  و تخمين سلوكها و تعيين نهايتها

إن وجدت.

$$u_{n+1} = 1 - 2u_n \quad \text{و} \quad u_0 = 2 \quad 14$$

$$u_{n+1} = \frac{1 - u_n}{1 + u_n} \quad \text{و} \quad u_0 = 3 \quad 15$$

$$u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \quad \text{و} \quad u_0 = \frac{1}{2} \quad 16$$

$$u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \quad \text{و} \quad u_0 = 1 \quad 17$$

خواص المتتاليات

18 ادرس إن كانت المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأسفل أو من الأعلى أو محدودة في كل من الحالات التالية :

$$\begin{array}{l|l} u_n = \frac{n+3}{2n-1} \cdot 3 & u_n = \frac{n+2}{n} \cdot 1 \\ & u_n = \frac{n^2+1}{n} \cdot 2 \end{array}$$

19 نفس السؤال بالنسبة إلى المتتاليات  $(u_n)$  التالية:

$$\begin{array}{l|l} u_n = 4^n - 3^n \cdot 3 & u_n = \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \cdot 1 \\ & u_n = \sqrt{n^2+1} - n \cdot 2 \end{array}$$

20 برهن أن المتتالية المعرفة كما يلي :  $u_0 = \frac{1}{7}$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}$  محدودة من الأعلى بالعدد  $\frac{3}{4}$ .

21 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين كما يلي :

$$v_n = -n \quad \text{و} \quad u_n = \frac{n+1}{n}$$

22 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين الهندسيتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  بعد تعيين حدها الأول (من أجل  $n = 0$ )

$$v_n = \frac{1}{3^{n+1}} \quad \text{و} \quad u_n = 2^{n-1}$$

23 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين كما يلي

$$v_n = (-2)^{n-1} \quad \text{و} \quad u_n = -\frac{1}{2^{n+1}}$$

24  $(u_n)$  هي متتالية معرفة على  $\mathbb{N}^*$  كما يلي :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

1. برهن أن  $(u_n)$  متناقصة.

2. أثبت أن  $(u_n)$  متقاربة. ما هي نهايتها ؟

25 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليات الهندسية  $(u_n)$  التالية علما أن حدها الأول  $u_0$  وأساسها  $q$ .

1.  $u_0 = -2$  و  $q = \frac{1}{3}$ .

2.  $u_0 = \frac{2}{3}$  و  $q = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

26 ادرس اتجاه تغير المتتالية الهندسية  $(v_n)$  التالية علم حدها الأول  $v_0$  وأساسها  $q$ .

1.  $v_0 = 1$  و  $q = 2$ .

2.  $v_0 = -1$  و  $q = -3$ .

27 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتين كما يلي :

1.  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = \sqrt{n+7}$ .

2.  $v_0 = 8$  و  $v_{n+1} = \sqrt{3v_n+1}$ .

28  $(u_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$$u_n = 1 + n + \sin n$$

1. أحصر  $(u_n)$  بمتتاليتين حسابيتين  $(v_n)$  و  $(w_n)$ .

2. استنتج نهاية  $(u_n)$  لما يؤول  $n$  إلى  $+\infty$ .

29  $(u_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي

$$u_n = \frac{n^4}{n!}$$

ادرس اتجاه تغير  $(u_n)$  و نهايتها إن وجدت.

30  $(u_n)$  متتالية معرفة كما يلي :

$$2u_n = u_{n+1} + 1 \quad \text{و} \quad u_0 = 2$$

1. برهن أن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة بحدها العام

$$v_n = u_n - 1$$

2. عبر عن  $u_n$  بدلالة  $n$ .

3. ادرس نهاية  $(u_n)$ .

31  $(u_n)$  متتالية معرفة كما يلي :

$$u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} - 4 \quad \text{و} \quad u_0 = 3$$

1. ادرس اتجاه تغير هذه المتتالية.

2.  $(v_n)$  هي المتتالية المعرفة كما يلي :

$$v_n = u_n + 6.$$

عين  $v_n$  بدلالة  $n$ .

3. ما هي نهاية  $(u_n)$  ؟

المتتاليات المتجاورتان

32 (32)  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $\mathbb{N}$

كما يلي :  $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$  و  $v_n = \frac{2n+7}{n+2}$

أثبت أن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان و عين نهايتهما.

33 (33)  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $\mathbb{N}$

كما يلي :  $u_n = \frac{3n+4}{n+1}$  و  $v_n = \frac{3n^2+4}{n^2+1}$

أثبت أن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  غير متجاورتين.

34 (34)  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $\mathbb{N}^*$

كما يلي :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$  و  $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$

أثبت أن المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان.

35 (35)  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $\mathbb{N}^*$

كما يلي :  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  و  $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

أثبت أن المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان.

مسائل

36 (36)  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0 = 1$  و  $u_n = u_{n-1} + n^2 - n + 5$

1. عين الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية.

2. برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم :

$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3. برهن أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم :

$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4. استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .

5. هل المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ؟

37 (37) نعرف المتتالية  $(u_n)$  بحدها الأول  $u_0 = 0$

و علاقة التراجع التالية  $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}$

1. احسب الحدود  $u_1, u_2, u_3$ .

2. لتكن  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]-2; +\infty[$

كما يلي  $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

و  $(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم

متعامد و متجانس  $(\vec{i}, \vec{j})$  ،  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ، (الوحدة 2cm).

أ. ارسم المستقيم  $(\Delta)$  الذي معادلته  $y = x$

و المنحنى  $(\mathcal{C})$  في المعلم السابق.

ب. استعمل المستقيم  $(\Delta)$  والمنحنى  $(\mathcal{C})$  لتمثيل النقط

من محور الفواصل التي فواصلها هي  $u_0, u_1, u_2, u_3$ .

ج. ماذا يمكن تخمينه حول سلوك المتتالية  $(u_n)$  ؟

3. برهن أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة.

4. أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي

$0 \leq u_n \leq 2$  :  $n$

5. احسب  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

38 (38)  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$

كما يلي :  $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2} \end{cases}$

1. احسب الحدود  $u_1, u_2, u_3$ .

2. نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال

$\left[ \frac{2}{3}; +\infty \right]$  كما يلي :  $f(x) = \sqrt{3x-2}$

ليكن  $(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(\vec{i}, \vec{j})$  ،  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ،

(الوحدة 1cm).

أ.  $(\Delta)$  هو المستقيم ذو المعادلة  $y = x$

أ. ارسم  $(\Delta)$  و  $(\mathcal{C})$  في المعلم السابق.

ب. باستعمال المستقيم  $(\Delta)$  والمنحنى  $(\mathcal{C})$  ، عين النقط

من  $(\mathcal{C})$  التي فواصلها  $u_0, u_1, u_2, u_3$ .

ج. ماذا يمكن تخمينه حول سلوك المتتالية  $(u_n)$  ؟

3. أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأسفل بالعدد 2.

4. أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة.

5. استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة.

6. احسب نهاية المتتالية  $(u_n)$ .



أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard\_equation

### 1 - تكامل دالة مستمرة

#### 1. تعريف

$f$  دالة معرفة و مستمرة على مجال  $I$ .  $a$  و  $b$  عددان من  $I$ .  
 $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$ .  
 العدد  $F(b) - F(a)$  يسمى التكامل من  $a$  إلى  $b$  للدالة  $f$ .  
 يرمز إليه بالرمز  $\int_a^b f(x) dx$  و يقرأ التكامل من  $a$  إلى  $b$  لـ  $f(x)$  تفاضل  $x$ .  
 و نكتب  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

**ملاحظة:** العدد  $\int_a^b f(x) dx$  يتعلق بالدالة  $f$ ،  $a$  و  $b$  فهو مستقل عن المتغير  $x$ .  
 أي أن  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz$

#### 2. التفسير الهندسي

المستوي منسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . المنحنى الممثل للدالة  $f$  في هذا المعلم.

الدالة  $f$  موجبة على المجال  $[a; b]$ .

العدد الحقيقي الموجب  $\int_a^b f(x) dx$  هو مساحة الحيز  $A$

للمستوي المحدود بالمنحنى  $(C)$  و محور الفواصل

و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x = a$  و  $x = b$ .

نكتب:  $A = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

الدالة  $f$  سالبة على المجال  $[a; b]$ .

العدد الحقيقي  $\int_a^b f(x) dx$  سالب و العدد الحقيقي

الموجب  $-\int_a^b f(x) dx$  هو مساحة الحيز  $B$

للمستوي المحدود بالمنحنى  $(C)$ ، محور الفواصل

و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x = a$  و  $x = b$ .

نكتب:  $B = -\int_a^b f(x) dx = F(a) - F(b)$

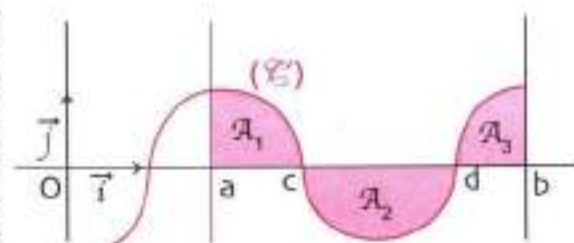
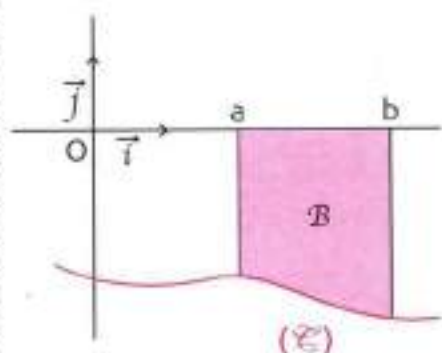
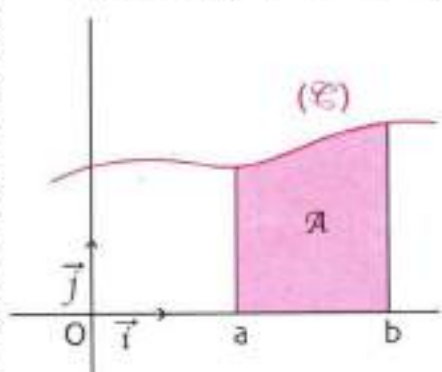
إشارة الدالة  $f$  تتغير على المجال  $[a; b]$ .

الدالة  $f$  معرفة و مستمرة على المجال  $[a; b]$ .

العدد الحقيقي  $\int_a^b |f(x)| dx$  هو مساحة الحيز  $A$

للمستوي المحدود بالمنحنى  $(C)$  و محور الفواصل

و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x = a$  و  $x = b$ .



$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| dx = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 : \text{ في الشكل يظهر أن}$$

$$= \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

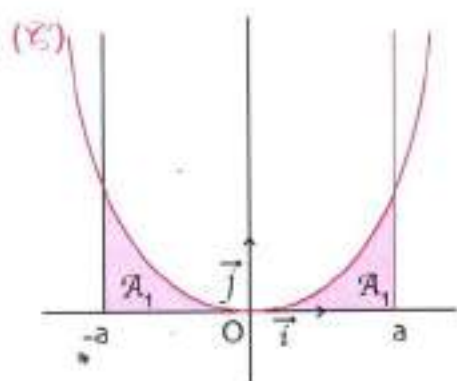
## II - الخواص

خاصية الخطية للتكامل

ف و  $g$  دالتان معرفتان ومستمرتان على مجال  $I$  و  $a$  و  $b$  عددان من المجال  $I$  من أجل كل عددين حقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  :

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

شفعية الدالة



ف دالة معرفة ومستمرة على مجال  $I$ .

إذا كانت  $f$  زوجية على  $I$ .

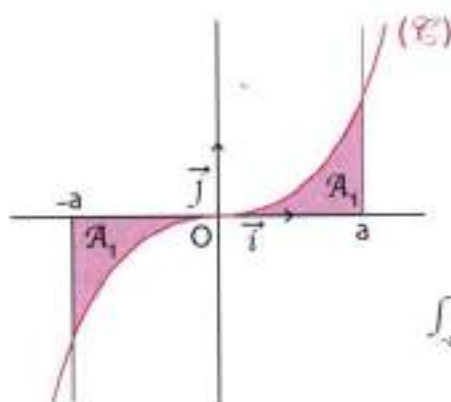
فإن من أجل كل عدد  $a$  من  $I$  :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

في الشكل المقابل، الدالة  $f$  موجبة

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \mathcal{A}_1 \text{ إذن}$$

$$\left( \int_{-a}^a f(x) dx = -2 \mathcal{A}_1 \text{ فإن } f \text{ سالبة فإن} \right)$$



• إذا كانت  $f$  فردية على  $I$ .

فإن من أجل كل عدد  $a$  من  $I$  :

في الشكل المقابل، الدالة  $f$  موجبة على  $[0; a]$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = -\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_1 = 0 \text{ إذن } [-a; 0]$$

علاقة شال

ف دالة معرفة ومستمرة على مجال  $I$ .

من أجل كل عدد  $a$  من  $I$  :

من أجل كل أعداد  $a, b, c$  من  $I$  :

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx : \text{ نتيجة : من أجل كل عددين } a \text{ و } b \text{ من } I$$

$$\left( \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \right)$$



### مبرهنة (إيجابية التكامل)

$f$  دالة معرفة و مستمرة على مجال  $[a ; b]$ .

إذا كان من أجل كل عدد  $x$  من  $[a ; b]$  ،  $f(x) \geq 0$  فإن  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .

### مبرهنة

$f$  و  $g$  دالتان معرفتان و مستمرتان على المجال  $[a ; b]$ .

إذا كان من أجل كل عدد  $x$  من  $[a ; b]$  ،  $f(x) \leq g(x)$  فإن  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ .

### مبرهنة (متباينة المتوسط)

$f$  دالة معرفة و مستمرة على مجال  $[a ; b]$ .

إذا كان  $m$  و  $M$  عددين حقيقيين حيث من أجل كل عدد  $x$  من  $[a ; b]$  ،  $m \leq f(x) \leq M$ .

فإن  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ .

### التفسير الهندسي

بفرض أن  $f$  موجبة على  $[a ; b]$ .

\* يكون  $m(b-a)$  هي مساحة المستطيل

الذي بعده  $b-a$  و  $m$ .

$M(b-a)$  هي مساحة المستطيل الذي بعده  $b-a$  و  $M$ .

$\int_a^b f(x) dx$  هي مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(\mathcal{C})$ ،

محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x=a$  و  $x=b$ .

### القيمة المتوسطة لدالة

$f$  دالة معرفة و مستمرة و موجبة على مجال  $[a ; b]$ .

### تعريف

القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على مجال  $[a ; b]$  هي العدد الحقيقي  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

### مبرهنة (حصر القيمة المتوسطة)

إذا كان  $m$  و  $M$  عددين حقيقيين حيث من أجل كل عدد  $x$  من  $[a ; b]$  ،  $m \leq f(x) \leq M$ .

فإن  $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$ .

### III - التكاملات والدوال الأصلية

### مبرهنة

إذا كانت  $f$  مستمرة على مجال  $I$  و  $a \in I$  فإن الدالة  $F$  المعرفة على  $I$  كما يلي :

$F(x) = \int_a^x f(t) dt$  هي الدالة الأصلية الوحيدة للدالة  $f$  التي تنعدم عند  $a$ .

## المكاملة بالتجزئة

إذا كانت  $u$  و  $v$  دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال  $I$  حيث الدالتان  $u'$  و  $v'$  مستمرتان على  $I$ .  
فإن  $\int_a^b u'(t) v(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u(t) v'(t) dt$ .  
هذه الطريقة لحساب  $\int_a^b u'(t) v(t) dt$  تسمى المكاملة بالتجزئة.

### حساب مساحات محدودة بمنحنى

$f$  دالة مستمرة على مجال  $I$ ؛  $a$  و  $b$  عددان من  $I$  حيث  $a < b$ .  
( $\mathcal{C}_f$ ) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
 $\mathcal{A}$  مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى ( $\mathcal{C}_f$ ) و محور الفواصل و المستقيمين  
ذوي المعادلتين  $x = a$  و  $x = b$ .

### مبرهنة

إذا كان من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $[a; b]$  ،  
 $f(x) \geq 0$  فإن  $\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx$  (وحدة المساحات)

إذا كان من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $[a; b]$  ،  
 $f(x) \leq 0$  فإن  $\mathcal{A} = - \int_a^b f(x) dx$  (وحدة المساحات)

إذا كانت إشارة  $f$  تتغير على  $[a; b]$  ،  
فإن  $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)| dx$  (وحدة المساحات)

ملاحظة : في الشكل المقابل،

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3$$

$$\mathcal{A} = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

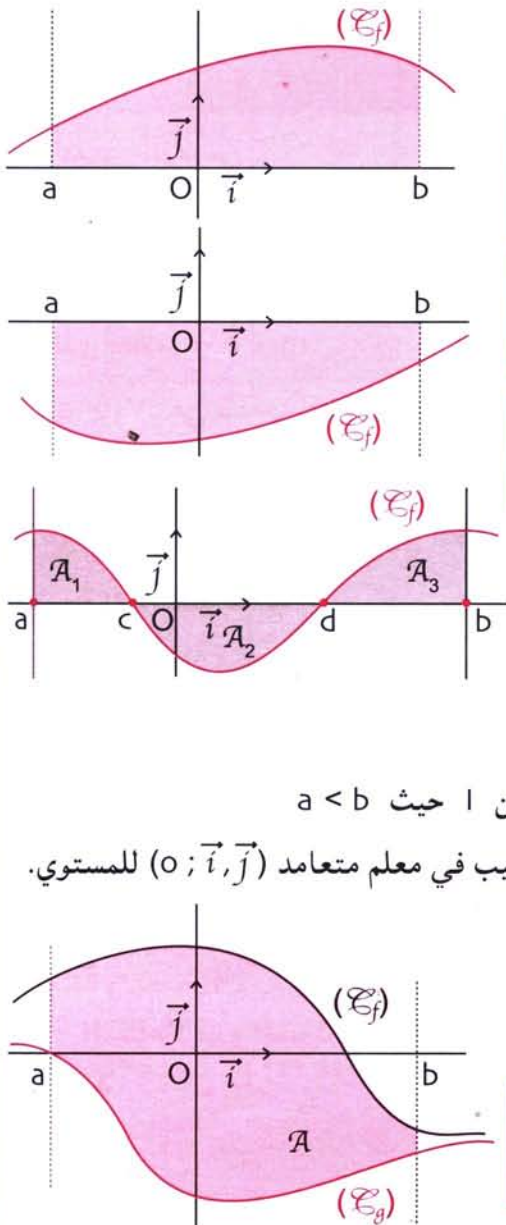
### حساب مساحة محدودة بمنحنين

$f$  و  $g$  دالتان مستمرتان على المجال  $I$ ؛  $a$  و  $b$  عددان من  $I$  حيث  $a < b$ .  
( $\mathcal{C}_f$ ) و ( $\mathcal{C}_g$ ) المنحنيان الممثلان للدالتين  $f$  و  $g$  على الترتيب في معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  للمستوي.

### مبرهنة

$\mathcal{A}$  هي المساحة المحدودة بالمنحنيين ( $\mathcal{C}_f$ ) و ( $\mathcal{C}_g$ )  
و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x = a$  و  $x = b$ .

إذا كان من أجل كل عدد  $x$  من  $I$  :  $f(x) \leq g(x)$   
فإن  $\mathcal{A} = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx$  (وحدة المساحات)





**ملاحظة :** إذا كان  $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$  و  $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$

فإن وحدة المساحات هي  $1\text{cm}^2$ .

إذا كان  $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$  و  $\|\vec{j}\| = 3\text{cm}$  فإن وحدة المساحات هي  $6\text{cm}^2$ .

فإن  $A = 5 \times 6\text{cm}^2 = 30\text{cm}^2$

**حساب حجوم**

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  معلم متعامد من الفضاء.  $(\mathcal{E})$  جزء من الفضاء محدود بالمستويين ذوي المعادلتين  $z = a$  و  $z = b$

و  $V$  حجمه.

**مبرهنة**

$t$  ينتمي إلى المجال  $[a; b]$ . ليكن  $S(t)$  مساحة السطح الناتج عن تقاطع الجزء  $(\mathcal{E})$  مع المستوي ذي

المعادلة  $z = t$  أي المستوي العمودي على  $(Oz)$  في  $P(0; 0; t)$  و الموازي للمستوي  $(oxy)$ .

إذا كانت الدالة  $S$  مستمرة على  $[a; b]$  فإن  $V = \int_a^b S(t) dt$  (وحدة الحجم)

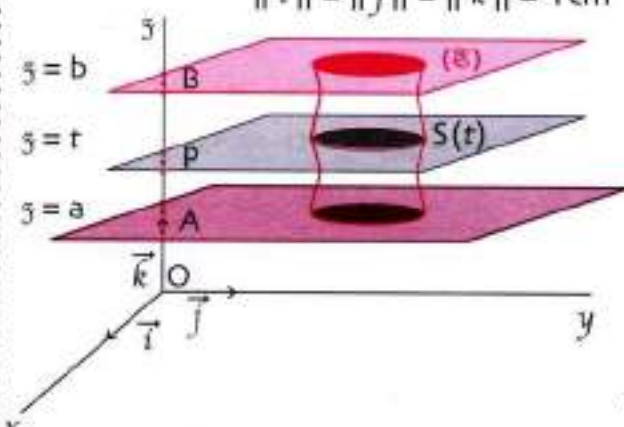
**ملاحظة :** إذا كان المعلم متعامدا ومتجانسا  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1\text{cm}$

فإن وحدة الحجم هي  $1\text{cm}^3$ .

إذا كان المعلم متعامدا حيث  $\|\vec{i}\| = 2\text{cm}$

و  $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$  و  $\|\vec{k}\| = 3\text{cm}$

فإن وحدة الحجم هي  $6\text{cm}^3$ .



**حجم مجسم دوراني محوره هو محور القواصل**

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  معلم متعامد ومتجانس من الفضاء. ليكن  $(\mathcal{C}_f)$  المنحني الممثل لدالة  $f$  المستمرة

على مجال  $[a; b]$  حيث  $a < b$  في المستوي ذي المعادلة  $z = 0$  (أي المستوي  $(oxy)$ ).

**مبرهنة**

عندما يدور المنحني حول المحور  $(O; \vec{i})$  فإنه يولد مجسما

دورانيا حجمه  $V = \int_a^b \pi [f(t)]^2 dt$  حيث  $t \in [a; b]$ .

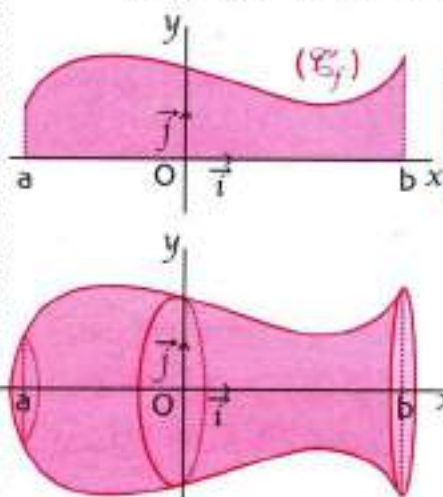
**ملاحظة :** بتطبيق المبرهنة السابقة وبملاحظة أن مساحة الحيز

المستوي المحصل عليها بتقاطع الجزء  $(\mathcal{E})$  مع المستوي ذي

المعادلة  $x = t$ ,  $t \in [a; b]$  هي مساحة القرص الذي نصف

قطره  $|f(x)|$ . إذن  $S(t) = \pi [f(t)]^2$

وبالتالي  $V = \int_a^b \pi [f(t)]^2 dt$





1 حساب تكامل دالة مستمرة

تقريب

احسب التكاملات التالية :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2 - x + 1) dx & : \int_{-2}^2 (4x + 5) dx & : \int_1^4 3 dx \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\sin x - 3\cos x) dx & : \int_0^{\pi} \sin x dx & : \int_0^{\pi} \cos x dx \end{aligned}$$

حل

حساب التكامل  $\int_1^4 3 dx$

الدالة  $f: x \mapsto 3$  ثابتة إذن  $f$  معرفة و مستمرة على  $\mathbb{R}$ .

و بالتالي فهي مستمرة على المجال  $[-1; 4]$ .

الدالة  $F$  المعرفة على  $[-1; 4]$  كما يلي :  $F(x) = 3x$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[-1; 4]$ .

$$\int_1^4 3 dx = F(4) - F(-1) = 3 \times 4 - 3(-1) = 12 + 3 = 15$$

$$\int_1^4 3 dx = 15 \quad \text{إذن}$$

حساب التكامل  $\int_{-2}^2 (4x + 5) dx$

الدالة  $f: x \mapsto 4x + 5$  معرفة و مستمرة على  $\mathbb{R}$ . فهي مستمرة على المجال  $[-2; 2]$ .

الدالة  $F$  المعرفة على  $[-2; 2]$  كما يلي :  $F(x) = 2x^2 + 5x$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[-2; 2]$ .

$$\int_{-2}^2 (4x + 5) dx = F(2) - F(-2) = (2(2)^2 + 5 \times 2) - (2(-2)^2 + 5(-2))$$

$$= (8 + 10) - (8 - 10) = 20$$

$$\int_{-2}^2 (4x + 5) dx = 20 \quad \text{و بالتالي}$$

حساب التكامل  $\int_0^1 (x^2 - x + 1) dx$

الدالة  $f: x \mapsto x^2 - x + 1$  معرفة و مستمرة على  $\mathbb{R}$ . فهي مستمرة على المجال  $[0; 1]$ .

الدالة  $F$  المعرفة على  $[0; 1]$  كما يلي :  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[0; 1]$ .

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1) dx = F(1) - F(0) = \left[ \frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{2}(1)^2 + 1 \right] - \left[ \frac{1}{3} \times 0 - \frac{1}{2} \times 0 + 0 \right]$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{6}$$

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1) dx = \frac{5}{6} \quad \text{و بالتالي}$$

حساب التكامل  $\int_0^{\pi} \cos x dx$

الدالة  $f: x \mapsto \cos x$  معرفة و مستمرة على  $\mathbb{R}$ . فهي مستمرة على المجال  $[0; \pi]$ .

الدالة  $F$  المعرفة على  $[0; \pi]$  كما يلي :  $F(x) = \sin x$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[0; \pi]$ .

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = F(\pi) - F(0) = \sin \pi - \sin 0 = 0$$

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = 0 \quad \text{و بالتالي}$$

• حساب التكامل  $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

الدالة  $f: x \mapsto \sin x$  معرفة و مستمرة على  $\mathbb{R}$ . فهي مستمرة على المجال  $[0; \pi]$ .  
الدالة  $F$  المعرفة على  $[0; \pi]$  كما يلي :  $F(x) = -\cos x$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[0; \pi]$   
ينتج أن  $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = F(\pi) - F(0) = -\cos \pi - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0$

و بالتالي  $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 0$

• حساب التكامل  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x - 2\sin x) \, dx$

الدالة  $f: x \mapsto 3\cos x - 2\sin x$  معرفة و مستمرة على  $\mathbb{R}$ . فهي مستمرة على المجال  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ .  
الدالة  $F$  المعرفة على  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  كما يلي :  $F(x) = 3\sin x + 2\cos x$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

ينتج أن  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x - 2\sin x) \, dx = F(\frac{\pi}{2}) - F(-\frac{\pi}{2})$   
 $= [3\sin \frac{\pi}{2} + 2\cos \frac{\pi}{2}] - [3\sin(-\frac{\pi}{2}) + 2\cos(-\frac{\pi}{2})]$   
 $= (3 \times 1 + 2 \times 0) - (3 \times (-1) + 2 \times 0) = 3 + 3 = 6$

\* و بالتالي  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos x - 2\sin x) \, dx = 6$

## 2 استعمال خاصية الخطية لحساب تكامل

### تمرين 1

1. تحقق أن من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  :  $\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$

2. احسب  $\int_2^3 \frac{2}{x^2 - 1} \, dx$

### حل

1. من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  :  $\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} = \frac{(x + 1) - (x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{2}{x^2 - 1}$   
و بالتالي من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  :  $\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}$

2. حساب التكامل  $\int_2^3 \frac{2}{x^2 - 1} \, dx$

لتكن  $f$  الدالة حيث  $f: x \mapsto \frac{2}{x^2 - 1}$

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  : و مستمرة على كل مجال محتوي في  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$   
إذن  $f$  مستمرة على المجال  $[2; 3]$ .

و بالتالي فهي تقبل على الأقل دالة أصلية على المجال  $[2; 3]$ .

لدينا  $\int_2^3 \frac{2}{x^2 - 1} \, dx = \int_2^3 \left[ \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right] \, dx = \int_2^3 \frac{1}{x - 1} \, dx - \int_2^3 \frac{1}{x + 1} \, dx$

(استعمال خاصية الخطية للتكامل)

الدالة  $F$  المعرفة على  $[2; 3]$  كما يلي :  $F(x) = \ln(x-1)$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{1}{x-1}$  على  $[2; 3]$ .

والدالة  $G$  المعرفة على  $[2; 3]$  كما يلي :  $G(x) = \ln(x+1)$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{1}{x+1}$  على  $[2; 3]$ .

$$\text{لدينا} \quad \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx = F(3) - F(2) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x+1} dx = G(3) - G(2) = 2\ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$$

$$\int_2^3 \frac{2}{x^2-1} dx = \ln 2 - \ln \frac{4}{3} = \ln \frac{2}{\frac{4}{3}} = \ln \frac{3}{2} \quad \text{ينتج أن}$$

$$\int_2^3 \frac{2}{x^2-1} dx = \ln \frac{3}{2} \quad \text{إذن}$$

## تمرين 2

$f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$  : كما يلي :  $f(x) = \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2}$

1. اثبت أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 1 :  $f(x) = 4(x-1) - \frac{1}{(x-1)^2}$

2. احسب  $\int_2^4 \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2} dx$

## حل

1. من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1 :  $4(x-1) - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2} = f(x)$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 1 :  $f(x) = 4(x-1) - \frac{1}{(x-1)^2}$

2. حساب  $\int_2^4 \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2} dx$

لدينا الدالة  $f$  مستمرة على كل من المجالين  $]-\infty; 1[$  و  $]1; +\infty[$ .

لأنها دالة ناطقة. و بالتالي الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $[2; 4]$ .

فهي تقبل دالة أصلية على المجال  $[2; 4]$ .

$$\text{لدينا} \quad \int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2} dx = \int_2^4 \left[ 4(x-1) - \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx$$

$$= \int_2^4 4(x-1) dx + \int_2^4 \frac{-1}{(x-1)^2} dx$$

الدالة  $F$  المعرفة على  $[2; 4]$  كما يلي :  $F(x) = 2x^2 - 4x$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto 4(x-1)$

على  $[2; 4]$ . الدالة  $G$  المعرفة على  $[2; 4]$  كما يلي :  $G(x) = \frac{1}{x-1}$

هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{-1}{(x-1)^2}$  على  $[2; 4]$ .



$$\int_2^4 4(x-1) dx = F(4) - F(2) = [2(4)^2 - 4(4)] - [2 \times 2^2 - 4 \times 2] = 16 \quad \text{إذن}$$

$$\int_2^4 \frac{-1}{(x-1)^2} dx = G(4) - G(2) = \left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{1}\right) = -\frac{2}{3} \quad \text{و}$$

$$\int_2^4 f(x) dx = \int_2^4 4(x-1) dx + \int_2^4 \frac{-1}{(x-1)^2} dx = 16 - \frac{2}{3} = \frac{46}{3} \quad \text{ينتج أن}$$

$$\int_2^4 \frac{4(x-1)^3 - 1}{(x-1)^2} dx = \frac{46}{3} \quad \text{إذن}$$

### 3 استعمال علاقة شال

#### تمرين 1

$$1. \text{ احسب كلا من التكاملين } \int_0^3 x(x^2+1) dx \quad \text{و} \quad \int_3^0 [-x(x^2+1)] dx$$

$$2. \text{ استنتج حساب التكامل } \int_3^3 |x|(x^2+1) dx$$

#### حل

$$1. \text{ لتكن } f \text{ الدالة المعرفة على المجال } [-3; 3] \text{ كما يلي : } f(x) = |x|(x^2+1)$$

$$\text{على المجال } [0; 3] : f(x) = x(x^2+1) \quad \text{و على المجال } [-3; 0] : f(x) = -x(x^2+1)$$

الدالة  $f$  مستمرة على كل من المجالين  $[-3; 0]$  و  $[0; 3]$ . إذن تقبل على الأقل دالة أصلية على كل

$$\text{من هذين المجالين. الدالة } F \text{ المعرفة على } [-3; 0] \text{ كما يلي : } F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2$$

هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[0; 3]$ . والدالة  $G$  المعرفة على  $[-3; 0]$  كما يلي :

$$G(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \text{ هي دالة أصلية } f \text{ على } [-3; 0].$$

$$\text{ينتج أن } \int_0^3 x(x^2+1) dx = F(3) - F(0) = \frac{99}{4} \quad \text{و} \quad \int_3^0 [-x(x^2+1)] dx = \frac{99}{4}$$

$$2. \int_3^3 |x|(x^2+1) dx = \int_3^0 -x(x^2+1) dx + \int_0^3 x(x^2+1) dx = \frac{99}{4} + \frac{99}{4} = \frac{99}{2}$$

$$\text{أي } \int_3^3 |x|(x^2+1) dx = \frac{99}{2}$$

#### تمرين 2

$$\text{احسب التكامل } \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx$$

#### حل

$$\text{لتكن } f \text{ الدالة المعرفة على } [-1; 1] \text{ كما يلي : } f(x) = |e^x - 1|$$

$$\text{من أجل كل عدد } x \text{ من المجال } [-1; 0] : f(x) = -(e^x - 1)$$

$$\text{و من أجل كل عدد } x \text{ من المجال } [0; 1] : f(x) = e^x - 1$$

الدالة  $f$  مستمرة على كل من المجالين  $[-1; 0]$  و  $[0; 1]$ . إذن تقبل دالة أصلية على الأقل على كل هذين المجالين.

$$\text{الدالة } F \text{ حيث } F(x) = -e^x + x \text{ هي دالة أصلية للدالة } f \text{ على } [-1; 0].$$

والدالة  $G$  حيث  $G(x) = e^x - x$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[1; 0]$ .

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |e^x - 1| dx &= \int_{-1}^0 -(e^x - 1) dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx \\ &= [F(0) - F(-1)] + [G(1) - G(0)] = \frac{1}{e} + e - 2 \end{aligned}$$

$$\int_{-1}^1 |e^x - 1| dx = \frac{1}{e} + e - 2 \quad \text{إذن}$$

#### 4 استعمال إيجابية التكامل

##### تقرين

$$1. \text{ اثبت أن } \int_0^\pi (x + 1 - \sin x) dx \geq 0$$

2. تحقق من ذلك بحساب هذا التكامل.

##### حل

1. نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0; \pi]$  كما يلي :  $f(x) = x + 1 - \sin x$

لدينا من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $[0; \pi]$  :  $0 \leq \sin x \leq 1$

إذن من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $[0; \pi]$  :  $0 \leq 1 - \sin x$

ينتج أن من أجل كل عدد  $x$  من  $[0; \pi]$  :  $x + 1 - \sin x \geq 0$

بما أن الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $[0; \pi]$  فإنها تقبل على الأقل دالة أصلية على  $[0; \pi]$ .

و بما أن من أجل كل عدد  $x$  من  $[0; \pi]$  :  $x + 1 - \sin x \geq 0$  فإن  $\int_0^\pi (x + 1 - \sin x) dx \geq 0$

2. التحقق من صحة هذه النتيجة حسابيا.

لدينا الدالة  $F$  المعرفة على  $[0; \pi]$  كما يلي :  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \cos x$  هي دالة أصلية

للدالة  $f$  على  $[0; \pi]$ .

$$\text{إذن } \int_0^\pi (x + 1 - \sin x) dx = F(\pi) - F(0) = \left( \frac{1}{2}\pi^2 + \pi + \cos \pi \right) - \left( \frac{1}{2} \times 0 + 0 + \cos 0 \right)$$

$$= \frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 1 - 1 = \frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 2 \quad \text{إذن}$$

$$\int_0^\pi (x + 1 - \sin x) dx = \frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 2 \quad \text{و بالتالي}$$

$$\int_0^\pi (x + 1 - \sin x) dx > 0 \quad \text{ينتج أن } \frac{1}{2}\pi^2 + \pi - 2 > 0 \quad \text{فإن } \pi - 2 > 0$$

$$\text{أي أن } \int_0^\pi (x + 1 - \sin x) dx \geq 0$$

**ملاحظة :** إذا تحقق الشرط  $f(x) \geq 0$  على المجال  $[a; b]$  فإنه يضمن إيجابية التكامل

أي  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$  والعكس غير صحيح يمكن أن يكون  $\int_a^b (x + 1 - \sin x) dx > 0$  دون تحقق

الشرط  $f(x) \geq 0$  على كل المجال  $[a; b]$ .

**لاحظ المثال المضاد :**  $\int_2^4 (-x + 2) dx$  الدالة  $-x + 2$  ليست دوما موجبة على  $[-2; 4]$

$$\text{و } \int_2^4 (-x + 2) dx = 6$$

## تمرين 1

ليكن التكامل  $I$  التالي :  $I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \frac{t}{1+t} \right) dt$  برهن أن  $\frac{1}{8} \leq I \leq \frac{1}{3}$  ، بدون حساب التكامل  $I$ .

## حل

من أجل كل عدد  $t$  من المجال  $\left[ \frac{1}{2}; 1 \right]$  ،  $\frac{3}{2} \leq 1+t \leq 2$  و بالتالي من أجل كل عدد  $t$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+t} \leq \frac{2}{3} \quad \text{من} \quad \left[ \frac{1}{2}; 1 \right]$$

$$\text{وبما أن} \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \quad \text{إذن} \quad \frac{1}{4} \leq \frac{t}{1+t} \leq \frac{2}{3}$$

و بالتالي  $\frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \frac{t}{1+t} \right) dt \leq \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{1}{2} \right)$  (متباينة المتوسط).

$$\text{أي أن} \quad \frac{1}{8} \leq I \leq \frac{1}{3} \quad \text{و بالتالي} \quad \frac{1}{8} \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( \frac{t}{1+t} \right) dt \leq \frac{1}{3}$$

## تمرين 2

$a$  و  $b$  عددا حقيقيان ينتميان إلى المجال  $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$  حيث  $a < b$ .

$$1. \text{ برهن أن من أجل كل عدد } x \text{ من المجال } \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right] : \frac{1}{\cos^2 a} \leq \frac{1}{\cos^2 x} \leq \frac{1}{\cos^2 b}$$

$$2. \text{ استنتج أن} \quad \frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

## حل

1. بفرض  $a \leq x \leq b$  ، ينتج أن  $\cos a \geq \cos x \geq \cos b$  لأن الدالة  $\cos$  متناقصة على المجال  $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$

$$\text{و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من أجل } \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right] : \frac{1}{\cos a} \leq \frac{1}{\cos x} \leq \frac{1}{\cos b}$$

لأن  $\cos a > 0$  و  $\cos b > 0$  و  $\cos x > 0$ .

$$\text{ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال } \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right] : \frac{1}{\cos^2 a} \leq \frac{1}{\cos^2 x} \leq \frac{1}{\cos^2 b}$$

$$2. \text{ بما أن من أجل كل عدد } x \text{ من المجال } \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right] : \frac{1}{\cos^2 a} \leq \frac{1}{\cos^2 x} \leq \frac{1}{\cos^2 b}$$

$$\text{فإن} \quad \frac{1}{\cos^2 a} (b-a) \leq \int_a^b \frac{1}{\cos^2 x} dx \leq \frac{1}{\cos^2 b} (b-a) \quad \text{(متباينة المتوسط)}$$

$$\text{أي أن} \quad \frac{b-a}{\cos^2 a} \leq [\tan x]_a^b \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

لأن الدالة  $x \mapsto \tan x$  دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$  على المجال  $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$ .

$$\text{و بالتالي} \quad \frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan b - \tan a \leq \frac{b-a}{\cos^2 b}$$



تقريب 1

ف هي الدالة المعرفة على المجال  $[0; \frac{\pi}{6}]$  كما يلي :  $f(x) = \cos(3x - \frac{\pi}{4})$   
احسب القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على المجال  $[0; \frac{\pi}{6}]$ .

حل

الدالة  $f$  مستمرة على المجال  $[0; \frac{\pi}{6}]$  فهي تقبل على الأقل دالة أصلية على  $[0; \frac{\pi}{6}]$ .

الدالة  $F$  المعرفة كما يلي :  $F(x) = \frac{1}{3} \sin(3x - \frac{\pi}{4})$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $[0; \frac{\pi}{6}]$ .

$$\begin{aligned} \text{القيمة المتوسطة للدالة } f \text{ على } [0; \frac{\pi}{6}] \text{ هي } & \frac{1}{\frac{\pi}{6} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x - \frac{\pi}{4}) dx \\ \text{لدينا } & \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x - \frac{\pi}{4}) dx = F(\frac{\pi}{6}) - F(0) = \frac{1}{3} \sin(3 \times \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{3} \sin(-\frac{\pi}{4}) \\ & = \frac{1}{3} \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) + \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$\text{إذن } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x - \frac{\pi}{4}) dx = \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ و بالتالي } \frac{1}{\frac{\pi}{6} - 0} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x - \frac{\pi}{4}) dx = \frac{6}{\pi} \times \frac{\sqrt{2}}{3}$$

ينتج أن القيمة المتوسطة للدالة  $f$  حيث  $f(x) = \cos(3x - \frac{\pi}{4})$  على المجال  $[0; \frac{\pi}{6}]$  هي  $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ .

7 استعمال المكاملة بالتجزئة

تقريب

احسب التكاملات التالية باستعمال المكاملة بالتجزئة.

$$\int_1^x \ln t \, dt \quad ; \quad \int_1^e x \ln x \, dx \quad ; \quad \int_0^1 (2-t) e^t \, dt \quad ; \quad \int_0^\pi (2x+3) \sin x \, dx$$

حل

حساب التكامل  $\int_0^\pi (2x+3) \sin x \, dx$

نضع  $v(x) = 2x+3$  و  $u'(x) = \sin x$ . إذن  $v'(x) = 2$  و  $u(x) = -\cos x$  (لأن الدالة  $v$  قابلة للاشتقاق على  $[0; \pi]$  و الدالة  $u'$  مستمرة على  $[0; \pi]$ ).

$$\begin{aligned} \text{و بالتالي } \int_0^\pi (2x+3) \sin x \, dx &= \left[ -(2x+3) \cos x \right]_0^\pi - \int_0^\pi (-2 \cos x) \, dx \\ &= 2\pi + 6 + 2 \int_0^\pi \cos x \, dx = 2\pi + 6 + 2 \left[ \sin x \right]_0^\pi \\ &= 2\pi + 6 + 2 \times 0 = 2\pi + 6 \end{aligned}$$

$$\text{إذن } \int_0^\pi (2x+3) \sin x \, dx = 2\pi + 6$$

حساب التكامل  $\int_0^1 (2-t) e^t \, dt$

نضع  $u(t) = 2-t$  و  $v'(t) = e^t$ . الدالة  $u$  قابلة للاشتقاق على  $[0; 1]$  و الدالة  $v'$  مستمرة على  $[0; 1]$ . إذن  $u'(t) = -1$  و  $v(t) = e^t$ .

$$\int_0^1 (2+t) e^t dt = \left[ (2-t) e^t \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^t) dt = (-3e + 2) + \int_0^1 e^t dt$$

$$= e - 2 + [e^t]_0^1 = 2e - 3$$

وبالتالي  $\int_0^1 (2-t) e^t dt = 2e - 3$

حساب التكامل  $\int_1^e x \ln x dx$

نضع  $u'(x) = x$  و  $v(x) = \ln x$  الدالة  $u'$  مستمرة على  $[1; e]$

و الدالة  $v$  قابلة للاشتقاق على  $[1; e]$ . إذن  $u(x) = \frac{1}{2} x^2$  و  $v'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_1^e x \ln x dt = \left[ \frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{1}{2} x dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} x^2 \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}$$

$$\int_1^e x \ln x dt = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} \text{ وبالتالي}$$

حساب التكامل  $\int_1^x \ln t dt$  حيث  $x > 1$

نضع  $u'(x) = 1$  و  $v(t) = \ln t$  الدالة  $u'$  مستمرة على  $[1; x]$

و الدالة  $v$  قابلة للاشتقاق على  $[1; x]$ . إذن  $u(x) = t$  و  $v'(x) = \frac{1}{t}$

$$\int_1^x \ln t dt = \left[ t \ln t \right]_1^x - \int_1^x t \times \frac{1}{t} dt = x \ln x - \int_1^x 1 dt$$

$$= x \ln x - [t]_1^x = x \ln x - x + 1$$

$$\int_1^x \ln t dt = x \ln x - x + 1 \text{ ينتج أن}$$

**8** تعيين الدالة الأصلية لدالة ، تنعدم عند عدد حقيقي معلوم

**تمرين**

$f$  هي الدالة المعرفة على  $]0; +\infty[$  كما يلي :  $f(x) = \sqrt{x} \ln x$

عين الدالة الأصلية للدالة  $f$  التي تنعدم عند العدد 1.

**حل**

الدالة  $f$  معرفة ومستمرة على  $]0; +\infty[$ . إذن  $f$  تقبل على الأقل دالة أصلية على  $]0; +\infty[$ .

الدالة الأصلية للدالة  $f$  على  $]0; +\infty[$  والتي تنعدم عند العدد 1 هي الدالة  $F$  المعرفة

$$F(x) = \int_1^x \sqrt{t} \ln t dt \text{ كما يلي :}$$

حساب التكامل  $\int_1^x \sqrt{t} \ln t dt$  باستعمال المكاملة بالتجزئة.

نضع  $u'(t) = \sqrt{t}$  و  $v(t) = \ln t$  الدالة  $u'$  مستمرة على  $]0; +\infty[$  و الدالة  $v$  قابلة للاشتقاق

على  $]0; +\infty[$ . إذن  $u(t) = \frac{2}{3} t \sqrt{t}$  و  $v'(t) = \frac{1}{t}$

$$\int_1^x \sqrt{t} \ln t dt = \left[ \frac{2}{3} t \sqrt{t} \ln t \right]_1^x - \int_1^x \frac{2}{3} \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \ln x - \frac{2}{3} \left[ \frac{2}{3} t \sqrt{t} \right]_1^x$$

$$= \frac{2}{3} x \sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} x \sqrt{x} + \frac{4}{9}$$

ينتج أن الدالة الأصلية  $f$  التي تنعدم عند العدد 1 هي الدالة  $F$  المعرفة على  $]0; +\infty[$

$$f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + \frac{4}{9}$$

## 9 حساب مساحة حيز من المستوى

### تقريب

احسب المساحة  $\mathcal{A}$  للحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  
 $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$  و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x = \ln 2$  و  $x = \lambda$  حيث  $\lambda > \ln 2$ .

### حل

الدالة  $f$  موجبة على المجال  $[\ln 2; \lambda]$ .

إذن المساحة هي العدد الموجب  $\mathcal{A}$  حيث  $\mathcal{A} = \int_{\ln 2}^{\lambda} \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

بوضع  $u(x) = e^x + 1$ . الدالة  $u$  معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال  $[\ln 2; \lambda]$  و  $u'(x) = e^x$ .

إذن  $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$  يكتب على الشكل :

$f$  تقبل دالة أصلية على  $[\ln 2; \lambda]$  هي الدالة  $F$  المعرفة على المجال  $[\ln 2; \lambda]$

كما يلي :  $F(x) = \ln [u(x)]$ . أي من أجل كل عدد  $x$  من  $[\ln 2; \lambda]$  :  $F(x) = \ln (e^x + 1)$ .

ينتج أن  $\mathcal{A} = \int_{\ln 2}^{\lambda} \frac{e^x}{e^x + 1} dx = F(\lambda) - F(\ln 2) = \ln (e^{\lambda} + 1) - \ln (e^{\ln 2} + 1)$

$$= \ln (e^{\lambda} + 1) - \ln 3 = \ln \left( \frac{e^{\lambda} + 1}{3} \right)$$

$$\mathcal{A} = \ln \left( \frac{e^{\lambda} + 1}{3} \right) \quad \text{و بالتالي}$$

## 10 حساب حجم حيز من الفضاء

### تقريب

الرسم التالي يمثل المنحنى  $(\mathcal{C})$  للدالة  $f$  المعرفة على  $[0; 9]$  كما يلي :  $f(x) = \sqrt{9-x}$

1. احسب بالسنتمتر المربع مساحة الحيز  $\mathcal{A}$  للمستوي الملون.

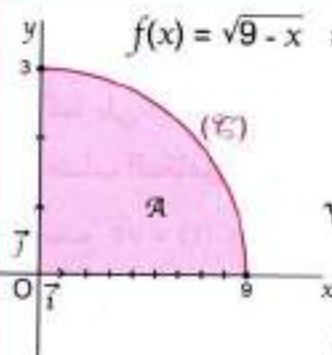
2. الفضاء منسوب إلى معلم متعامد  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  و  $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

عندما يدور المنحنى  $(\mathcal{C})$  حول محور الفواصل، يولد مجسما  $S_1$  حجمه  $V_1$

و عندما يدور حول محور الترتيب يولد مجسما  $S_2$  حجمه  $V_2$ .

احسب الحجم  $V_1$  حيث  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1\text{cm}$  و  $\|\vec{i}\| = \frac{1}{3}\text{cm}$

احسب الحجم  $V_2$  حيث  $\|\vec{i}\| = \|\vec{k}\| = \frac{1}{3}\text{cm}$  و  $\|\vec{j}\| = 1\text{cm}$





1. حساب مساحة الحيز  $\mathcal{A}$ .

الحيز  $\mathcal{A}$  هو الجزء المحدود بالمنحنى  $(\mathcal{C})$  و بمحور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x = 0$  و  $x = 9$ .  
وبما أن الدالة  $f$  موجبة على المجال  $[0; 9]$  فإن  $\mathcal{A} = \int_0^9 f(x) dx$  .  
حساب  $\int_0^9 f(x) dx$

لدينا من أجل كل عدد  $x$  من المجال  $[0; 9]$  :  $f(x) = (9 - x)^{\frac{1}{2}}$   
الدالة  $F$  حيث  $F(x) = -\frac{2}{3}(9 - x)^{\frac{3}{2}}$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $[0; 9]$

و بالتالي  $\mathcal{A} = \int_0^9 f(x) dx = F(9) - F(0) = -\frac{2}{3}(9 - 9)\sqrt{9 - 9} + \frac{2}{3}(9 - 0)\sqrt{9 - 0} = 18$   
أي  $\mathcal{A} = 18$  (وحدة المساحات).

وحدة المساحات هي  $\frac{1}{3} \text{ cm}^2$  ينتج أن  $\mathcal{A} = 6 \text{ cm}^2$ .

2. حساب الحجم  $V_1$ .

لدينا  $V_1 = \int_0^9 S(t) dt$

$$= \int_0^9 \pi \left[ f(t) \right]^2 dt = \left[ \pi \left( 9t - \frac{1}{2} t^2 \right) \right]_0^9$$

$$= \pi \left( 81 - \frac{81}{2} \right) - \pi \times 0 = \frac{81}{2} \pi$$

وحدة الحجم هي  $\frac{1}{3} \text{ cm}^3$ .

و بالتالي  $V_1 = \frac{27}{2} \pi \text{ cm}^3$  أي  $V_1 \approx 42,412 \text{ cm}^3$ .

حساب الحجم  $V_2$ .

لدينا  $V_2 = \int_0^3 S(t) dt$

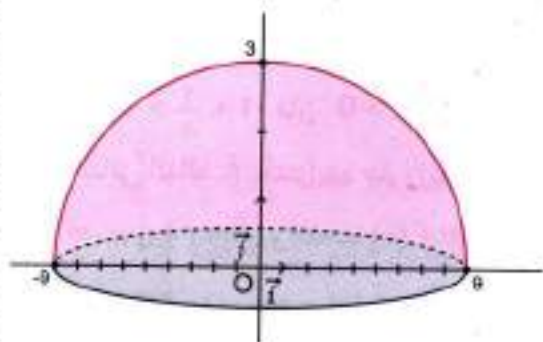
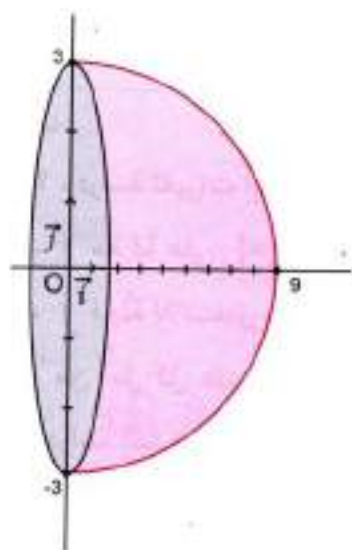
$$= \int_0^3 9\pi^2 dt = \left[ (9\pi^2 t) \right]_0^3$$

$$= 9\pi^2 \times 3 = 27\pi^2$$

وحدة الحجم هي  $\frac{1}{3} \text{ cm}^3$ .

إذن  $V_2 = 2\pi^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 \text{ cm}^3 = 3\pi^2 \text{ cm}^3$

و بالتالي  $V_2 \approx 29,609 \text{ cm}^3$ .



تمرين 1

- $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي :  $f(x) = x + \ln|x| + e^{-x}$  و  $(\mathcal{E}_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . (الوحدة 1cm)
1. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .
  2. ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى  $(\mathcal{E}_f)$ .
  3. أثبت أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلين مختلفين  $x_1$  و  $x_2$  حيث  $-\frac{1}{2} < x_2 < -\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{4} < x_1 < \frac{1}{2}$ .
  4. عين معادلة المماس  $(\Delta)$  للمنحنى  $(\mathcal{E}_f)$  عند النقطة A فاصلتها 1.
  5. ارسم  $(\mathcal{E}_f)$ .
  6. (D) هو المستقيم ذو المعادلة  $y = x$  و  $\lambda$  عدد حقيقي أكبر تماما من 1. احسب المساحة  $\mathcal{A}(\lambda)$  للحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(\mathcal{E}_f)$ ، والمستقيم (D) والمستقيمين ذوي المعادلتين  $x = \lambda$  و  $x = 1$ . اعطي  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$ . يعطي  $\ln 2 \approx 0,69$  :  $e^{\frac{1}{2}} \approx 1,65$ .

حل

1. دراسة تغيرات الدالة  $f$ .  
 $f$  معرفة على  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$ . (أي على  $\mathbb{R}^*$ ).  
 $f$  قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$ .  
ومن أجل كل عدد  $x$  يختلف عن 0 :  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} - e^{-x}$ .  
. دراسة إشارة  $f'(x)$  على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$ .  
إذا كان  $x < 0$  فإن  $-x > 0$  وبالتالي  $e^{-x} > 1$ .  
بما أن  $1 + \frac{1}{x} < 1$  فإن  $1 + \frac{1}{x} - e^{-x} < 0$  أي على المجال  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) < 0$ .  
وبالتالي الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]0; +\infty[$ .  
إذا كان  $x > 0$  فإن  $-x < 0$  وبالتالي  $e^{-x} < 1$ .  
بما أن  $1 + \frac{1}{x} > 1$  فإن  $1 + \frac{1}{x} - e^{-x} > 0$  أي على المجال  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) > 0$ .  
وبالتالي الدالة  $f$  متزايدة على المجال  $]0; +\infty[$ .  
.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  أي  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ .  
و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|x| = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ . إذن توجد حالة عدم التعيين.  
لدينا من أجل  $x < 0$  :  $f(x) = x + \ln(-x) + e^{-x} = -x \left( -1 + \frac{\ln(-x)}{-x} + \frac{e^{-x}}{-x} \right)$ .  
عندما  $x \rightarrow -\infty$  فإن  $-x \rightarrow +\infty$  وبالتالي  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{-x} = +\infty$ .

ينتج أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  أي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -x \left( -1 + \frac{\ln(-x)}{-x} + \frac{e^{-x}}{-x} \right) \right] = +\infty$   
 من أجل  $x > 0$  لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$   
 إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln x + e^{-x}) = +\infty$  بالتالي  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

| x       | $-\infty$ | 0         | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ | -         |           | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

• جدول التغيرات

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  إذن المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  (أي محور الترتيب)

مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ .

إذن المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  يقبل فرع قطع مكافئ منناه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{\ln|x|}{x} + \frac{e^{-x}}{x} \right) = -\infty$

محور الترتيب.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = +\infty$

\* إذن المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  يقبل فرع قطع مكافئ منناه المستقيم ذو المعادلة  $y = x$ .

تحديد الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  والمستقيم ذي المعادلة  $y = x$  بجوار  $+\infty$ .

لدينا من أجل كل عدد  $x$  أكبر تماماً من 1 :  $\ln x + e^{-x} > 0$  أي  $f(x) - x > 0$

و بالتالي  $(\mathcal{C}_f)$  يقع فوق المستقيم ذي المعادلة  $y = x$  على المجال  $]1; +\infty[$ .

3. الدالة  $f$  معرفة و مستمرة و متزايدة تماماً على المجال  $\left[ \frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right]$  و  $f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

إذن المعادلة تقبل حلاً وحيداً  $x_1$  حيث  $\frac{1}{4} < x_1 < \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,413$  و  $f\left(\frac{1}{4}\right) \approx -0,357$  (إستعمال حاسبة)

و بالتالي  $(\mathcal{C}_f)$  يقطع محور الفواصل في النقطة فاصلتها  $x_1$  حيث  $\frac{1}{4} < x_1 < \frac{1}{2}$ .

لدينا كذلك  $f$  معرفة و مستمرة و متناقصة تماماً على المجال  $\left[ -\frac{1}{2}; -\frac{1}{4} \right]$ .

$f\left(-\frac{1}{2}\right) \approx 0,456$  و  $f\left(-\frac{1}{4}\right) \approx -0,358$  (باستعمال حاسبة)

و  $f\left(-\frac{1}{4}\right) \cdot f\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$  إذن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $x_2$  حيث  $-\frac{1}{2} < x_2 < -\frac{1}{4}$ .

ينتج أن المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها  $x_2$  حيث  $-\frac{1}{2} < x_2 < -\frac{1}{4}$ .

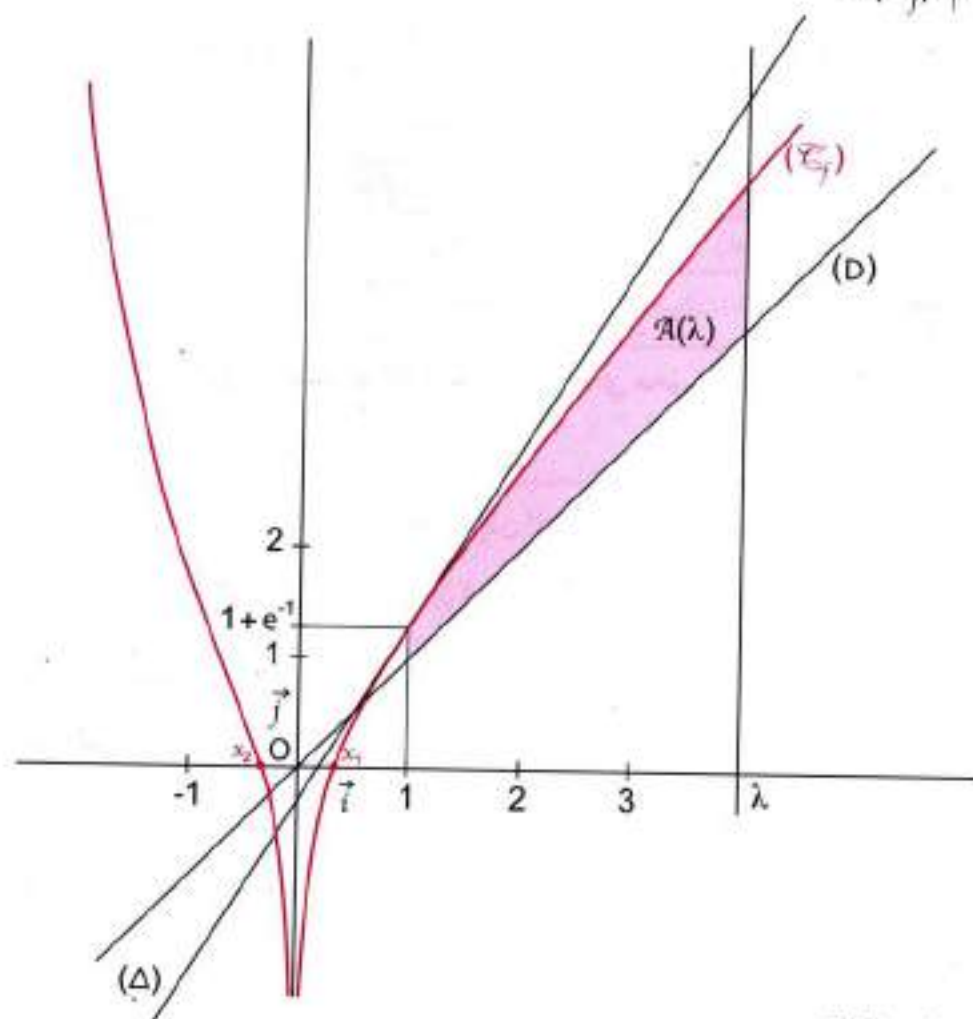
4. معادلة المماس  $(\Delta)$  عند النقطة A التي فاصلتها 1.

لدينا  $f(1) = 1 + \frac{1}{e}$  :  $f'(1) = 2 - \frac{1}{e}$

معادلة  $(\Delta)$  هي  $y = \left(2 - \frac{1}{e}\right)x - 1 + \frac{2}{e}$



5. رسم  $(\mathcal{E}_f)$ .



6. حساب  $\mathcal{A}(\lambda)$ .

على المجال  $[1; +\infty[$  :  $f(x) - x > 0$  (لأن  $e^{-x} > 0$  و  $\ln x \geq 0$ )

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_1^\lambda [f(x) - x] dx = \int_1^\lambda (\ln x + e^{-x}) dx$$

إذن

$$= \int_1^\lambda \ln x dx + \int_1^\lambda e^{-x} dx = [x \ln x - x]_1^\lambda + [-e^{-x}]_1^\lambda$$

$$= \lambda \ln \lambda - \lambda - e^{-\lambda} + 1 + \frac{1}{e} = \lambda \left[ \ln \lambda - 1 - \frac{1}{\lambda e^\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda e} \right]$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \left( \lambda \ln \lambda - \lambda - e^{-\lambda} + 1 + \frac{1}{e} \right) \text{ cm}^2$$

إذن

حساب  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$ .

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \left[ \ln \lambda - 1 - \frac{1}{\lambda e^\lambda} + \frac{1}{\lambda e} + \frac{1}{\lambda} \right] = +\infty$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = +\infty$$

إذن

## تمرين 2

- $g$  هي الدالة المعرفة بـ  $g(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ .  
 (E) المنحنى الممثل للدالة  $g$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
1. عين مجموعة التعريف  $D$  للدالة  $g$ .
  2. اثبت أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$ ،  $g(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$ .
  3. ادرس تغيرات الدالة  $g$ .
  4. ادرس الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة للمنحنى (E).
  5. حدد الوضع النسبي للمنحنى (E) و المستقيم المقارب المائل (Δ).
  6. ارسم المنحنى (E) في المعلم السابق.
  7.  $a$  عدد حقيقي أكبر تماماً من 4.
  8. احسب المساحة  $S(a)$  للحيز المستوي المحدود بالمنحنى (E) المستقيم المقارب (Δ) و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x = a$  و  $x = 4$ .
  9. ما هي نهاية هذه المساحة لما يتوَلَّ  $a$  إلى  $+\infty$  ؟

## حل

$$D = \mathbb{R} - \{1\} = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[. \quad 1$$

$$x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x+2)(x-1)^2 + 3(x-1) + 1}{(x-1)^2} \quad 2$$

$$= \frac{x^3}{(x-1)^2} = g(x)$$

$$g(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \quad 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$$

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]1; +\infty[$  و  $]-\infty; 1[$ .

$$g'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3} \quad 4$$

إشارة  $g'(x)$  على  $\mathbb{R} - \{0\}$  ملخصة

| $x$     | $-\infty$ | 0 | 1 | 3 | $+\infty$ |   |
|---------|-----------|---|---|---|-----------|---|
| $g'(x)$ | +         | 0 | + | - | 0         | + |

في الجدول التالي

## تمارين و حلول نموذجية

جدول تغيرات الدالة يكون كالآتي :

| $x$     | $-\infty$ | 0 | 1         | 3         | $+\infty$      |           |
|---------|-----------|---|-----------|-----------|----------------|-----------|
| $g'(x)$ | +         | 0 | +         | -         | 0              | +         |
| $g(x)$  | $-\infty$ |   | $+\infty$ | $+\infty$ | $\frac{27}{4}$ | $+\infty$ |

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$  إذن المستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  مستقيم مقارب للمنحنى (C).

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  :  $g(x) - (x + 2) = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - (x + 2)] = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (x + 2)] = 0$

بالتالي المستقيم (Δ) ذو المعادلة  $y = x + 2$  مستقيم مقارب للمنحنى (C).

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  :  $g(x) - (x + 2) = \frac{3x-2}{(x-1)^2}$

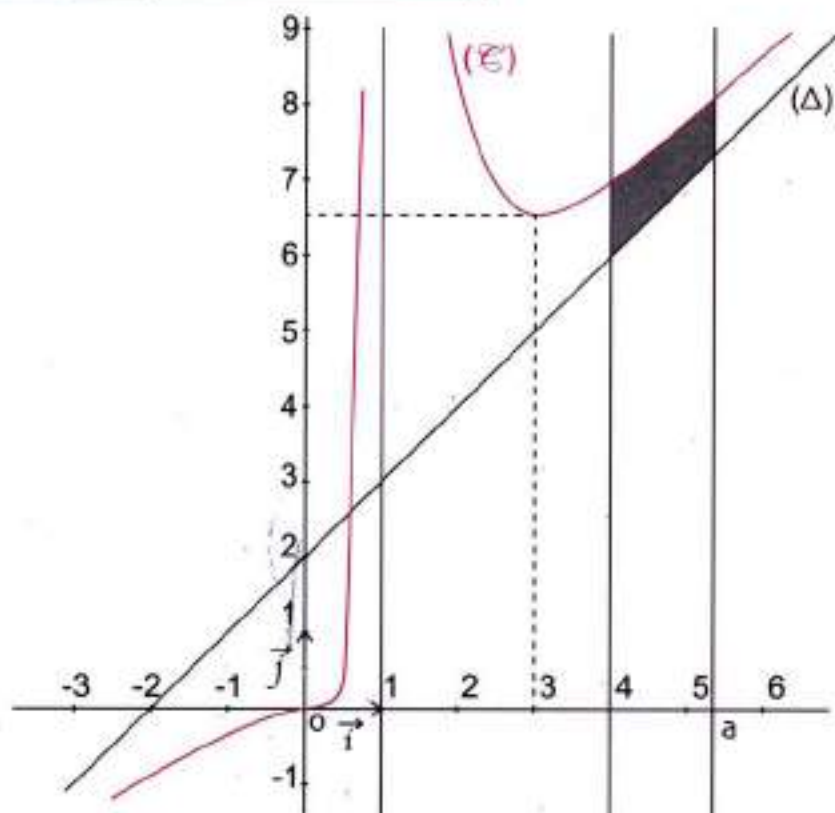
إشارة العبارة  $g(x) - (x + 2)$  و الوضع

النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ)

ملخصة في الجدول المقابل

| $x$              | $-\infty$   | 1           | $\frac{2}{3}$ | $+\infty$   |
|------------------|-------------|-------------|---------------|-------------|
| $g(x) - (x + 2)$ | -           | -           | 0             | +           |
| الوضع النسبي     | (C) تحت (Δ) | (C) فوق (Δ) | (C) يقطع (Δ)  | (C) فوق (Δ) |

5. رسم المنحنى (C).





6. حساب المساحة  $S(a)$ .

لدينا  $g(x) - (x+2) > 0$  على المجال  $[4; +\infty[$ .

$$S(a) = \int_4^a [g(x) - (x+2)] dx \quad \text{إذن}$$

$$= \int_4^a \left[ \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right] dx = \left[ 3\ln(x-1) - \frac{1}{x-1} \right]_4^a$$

$$= 3\ln\left(\frac{a-1}{3}\right) - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{3}$$

$$S(a) = 3\ln\left(\frac{a-1}{3}\right) - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{3} \quad \text{إذن}$$

لدينا  $\lim_{a \rightarrow +\infty} 3\ln\left(\frac{a-1}{3}\right) = +\infty$  و  $\lim_{a \rightarrow +\infty} -\frac{1}{a-1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$  إذن  $\lim_{a \rightarrow +\infty} S(a) = +\infty$ .

## مسألة

### الجزء الأول

$g$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = 2e^x + 2x - 7$

1. عين نهايتي  $g$  عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$ .

2. ادرس اتجاه تغير الدالة  $g$  و المحز جدول تغيراتها.

3. بين أن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .

4. ادرس إشارة  $g$  على  $\mathbb{R}$ .

### الجزء الثاني

$f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي  $f(x) = (2x-5)(1-e^{-x})$

(ع) هو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي النسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. ادرس إشارة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

2. عين نهايتي  $f$  عند  $-\infty$  و عند  $+\infty$ .

3. احسب  $f'(x)$  حيث  $f'$  هي الدالة المشتقة للدالة  $f$ . تحقق أن  $f'(x)$  و  $g(x)$  لهما نفس الإشارة.

4. استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  و المحز جدول تغيراتها.

$$5. \text{ أ) برهن أن } f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7}$$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $h$  المعرفة على المجال  $\left] -\infty; \frac{5}{2} \right]$  كما يلي  $h(x) = \frac{(2x-5)^2}{2x-7}$

ج) إنطلاقا من حصر العدد  $\alpha$  المحصل عليه في الجزء الأول ، أعط حصر للعدد  $f(\alpha)$ .

د) برهن أن المستقيم (D) ذا المعادلة  $y = 2x - 5$  مستقيم مقارب للمنحنى (ع) بجوار  $+\infty$ .

حدد الوضع النسبي للمنحنى (ع) و المستقيم (D).

## تمارين و حلول نموذجية

6. ارسم المستقيم (D) والمنحنى (C) في المعلم  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  (الوحدة 2cm).

7.  $\lambda$  عدد حقيقي أكبر تماما من  $\frac{5}{2}$ .

عين المساحة  $A(\lambda)$  للحيز المستوي المحدود بالمنحنى (C)، محور الفواصل و المستقيمين

ذوي المعادلتين  $x=0$  و  $x=\lambda$ . احسب نهاية  $A(\lambda)$  لما يؤول  $\lambda$  إلى  $+\infty$ .

حل

الجزء الأول

الدالة  $g$  معرفة على  $\mathbb{R}$  و  $g(x) = 2e^x + 2x - 7$

1. حساب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 7) = -\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

و لدينا أيضا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 7) = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

2. الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  (لأنها مجموع دوال قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ )

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $g'(x) = 2e^x + 2$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $e^x > 0$

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $2e^x + 2 > 0$

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $g'(x) > 0$

إذن الدالة  $g$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

جدول تغيرات الدالة يكون كالآتي

| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|
| $g'(x)$ |           | +         |
| $g(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

3. الدالة  $g$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  إذن  $g$  مستمرة على المجال  $[0; 1]$ .

الدالة  $g$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  إذن  $g$  متزايدة تماما على المجال  $[0; 1]$ .

لدينا  $g\left(\frac{1}{2}\right) = -2,7$  و  $g(1) = 2e + 2 - 7$  أي  $g(1) \approx 0,44$  إذن  $g(1) \cdot g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

بما أن  $g$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$  و  $g(1) \cdot g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

فإن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا واحدا  $\alpha$  حيث  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ .

4. دراسة إشارة  $g$  على  $\mathbb{R}$ .

إشارة  $g(x)$  ملخصة في الجدول التالي

| $x$    | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|----------|-----------|
| $g(x)$ | -         | 0        | +         |

## الجزء الثاني

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  و  $f(x) = (2x - 5)(1 - e^{-x})$ .

1. دراسة إشارة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

إشارة  $f$  ملخصة في الجدول التالي

| $x$          | $-\infty$ | 0 | $\frac{5}{2}$ | $+\infty$ |   |
|--------------|-----------|---|---------------|-----------|---|
| $2x - 5$     | -         | - | 0             | +         |   |
| $1 - e^{-x}$ | -         | 0 | +             | +         |   |
| $g(x)$       | +         | 0 | -             | 0         | + |

2. تعيين  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - e^{-x}) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 5) = -\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

ولدينا أيضا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 5) = +\infty$  إذن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

3. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = 2 + (2x - 7)e^{-x}$

نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = \frac{2e^x + 2x - 7}{e^x}$

\* و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$

بما أن  $e^x > 0$  على  $\mathbb{R}$  فإن  $f'(x)$  و  $g(x)$  لهما نفس الإشارة.

إشارة  $f'(x)$  ملخصة في الجدول التالي

| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|----------|-----------|
| $f'(x)$ | -         | 0        | +         |

4. من جدول إشارة  $f'(x)$  ينتج أن

الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $]-\infty; \alpha]$  و متزايدة على المجال  $[\alpha; +\infty[$ .

جدول تغيرات الدالة  $f$  يكون كالآتي

لدينا  $f(\alpha) = (2\alpha - 5)(1 - e^{-\alpha})$

| $x$     | $-\infty$ | $\alpha$    | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------|-----------|
| $f'(x)$ | -         | 0           | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $f(\alpha)$ | $+\infty$ |

5. أ. البرهان على أن  $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$

نعلم أن  $g(\alpha) = 0$  أي  $2e^{\alpha} + 2\alpha - 7 = 0$  و منه  $e^{\alpha} = \frac{7}{2} - \alpha$

لدينا  $f(\alpha) = (2\alpha - 5)(1 - e^{-\alpha})$  أو  $f(\alpha) = (2\alpha - 5)\left(1 - \frac{1}{e^{\alpha}}\right)$

و بالتالي  $f(\alpha) = (2\alpha - 5)\left(1 - \frac{1}{\frac{7}{2} - \alpha}\right)$  بعد التبسيط ينتج أن  $f(\alpha) = \frac{(2\alpha - 5)^2}{2\alpha - 7}$



## تمارين و حلول نموذجية

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة  $h$  على المجال  $]-\infty; \frac{5}{2}]$ .

$$h(x) = \frac{(2x-5)^2}{2x-7} \quad \text{لدينا}$$

الدالة  $h$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]-\infty; \frac{5}{2}]$ .

$$h'(x) = \frac{(2x-5)(4x-18)}{(2x-7)^2} \quad ; \quad ]-\infty; \frac{5}{2}] \quad \text{من } x \text{ من أجل كل عدد}$$

إشارة  $h'(x)$  على  $\mathbb{R} - \{\frac{7}{2}\}$

ملخصة في الجدول المقابل

ينتج أن  $h'(x) \geq 0$

على المجال  $]-\infty; \frac{5}{2}]$  وبالتالي الدالة  $h$  متزايدة تماما على المجال  $]-\infty; \frac{5}{2}]$ .

$$f(\alpha) = \frac{(2\alpha-5)^2}{2\alpha-7} \quad \text{نعلم أن}$$

$$f(\alpha) = h(\alpha) \quad \text{و} \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

الدالة  $h$  متزايدة تماما على المجال  $]-\infty; \frac{5}{2}]$  و  $\alpha$  ينتمي إلى هذا المجال

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{3} \quad \text{و} \quad h(0) = -\frac{25}{7} \quad \text{حيث} \quad h(0) < h(\alpha) < h\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{بما أن} \quad f(\alpha) = h(\alpha) \quad \text{و} \quad -\frac{25}{7} < h(\alpha) < -\frac{8}{3}$$

$$\text{إذن} \quad -\frac{25}{7} < f(\alpha) < -\frac{8}{3} \quad \text{أو} \quad -3.57 < f(\alpha) < -2.67$$

(د) لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x-5)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-(2x-5)e^{-x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{2x-5}{-e^x} \right) \right] = 0$$

ينتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة  $y = 2x - 5$  مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$  بجوار  $+\infty$ .

تحديد الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{C})$  والمستقيم (D).

$$\text{لذلك ندرس إشارة} \quad f(x) - (2x-5) \quad \text{لدينا} \quad f(x) - (2x-5) = -\frac{2x-5}{e^x}$$

إشارة  $f(x) - (2x-5)$  ملخصة في الجدول المقابل.

من الجدول السابق ينتج أن

(E) تحت (D) على المجال  $]\frac{5}{2}; +\infty[$

(E) فوق (D) على المجال  $]-\infty; \frac{5}{2}[$

(E) يقطع (D) في النقطة ذات الفاصلة  $\frac{5}{2}$ .

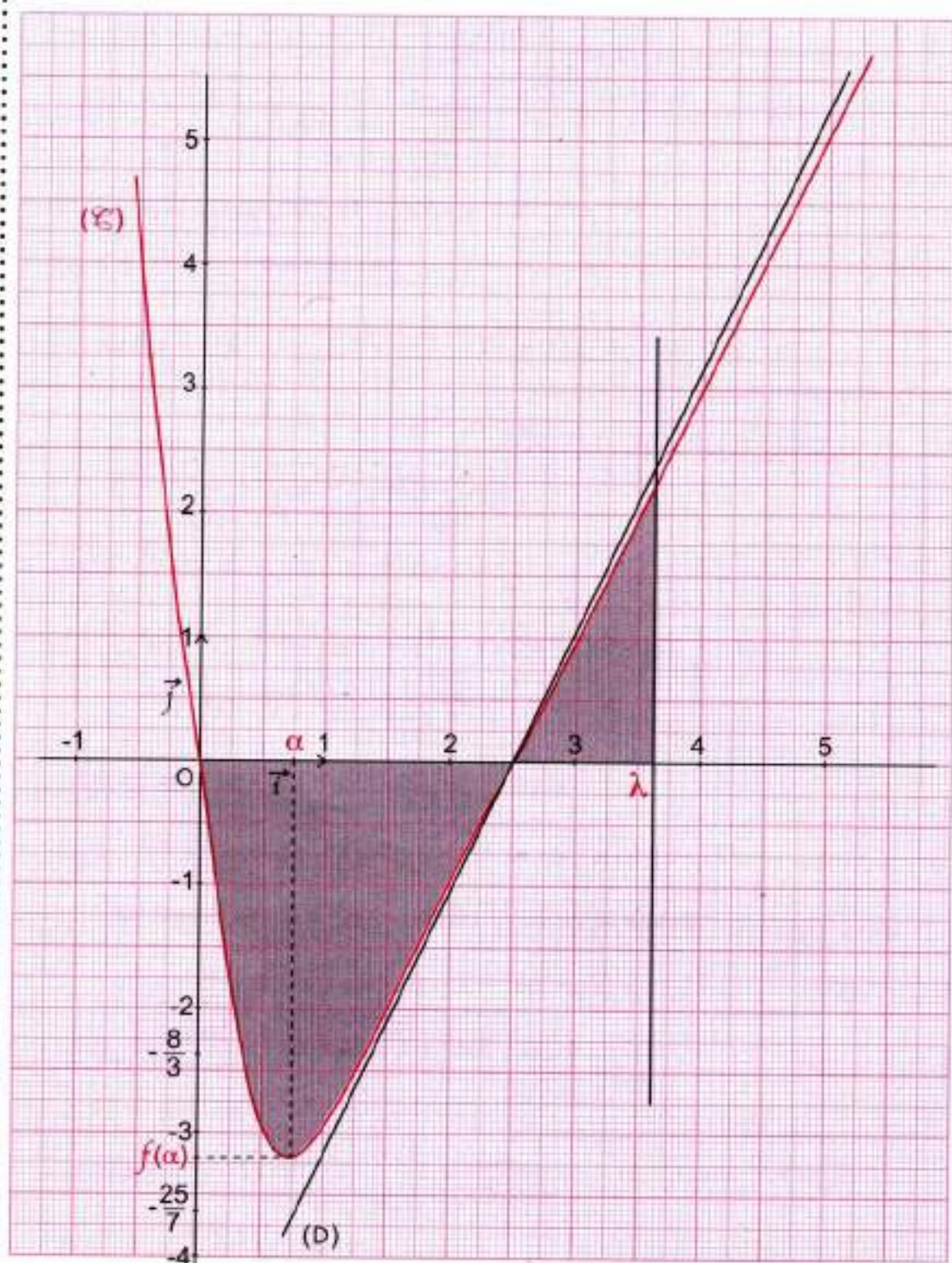
| x       | $-\infty$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{7}{2}$ | $\frac{9}{2}$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|---------------|---------------|---------------|-----------|
| $h'(x)$ | +         | 0             | -             | -             | +         |

| x               | $-\infty$ | $\frac{5}{2}$ | $+\infty$ |
|-----------------|-----------|---------------|-----------|
| $2x-5$          | -         | 0             | +         |
| $f(x) - (2x-5)$ | +         | 0             | -         |

3. رسم (E) و (D).

الدالة  $f$  تقبل قيمة صغرى  $f(\alpha)$  عند  $\alpha$ .

(E) يقطع محور الفواصل في النقطة 0 و النقطة ذات الفاصلة  $\frac{5}{2}$ .





7. الدالة  $f$  سالبة على المجال  $\left[0; \frac{5}{2}\right]$  و موجبة على المجال  $\left[\frac{5}{2}; +\infty\right]$

$$\text{إذن } \mathcal{A}(\lambda) = -\int_0^{\frac{5}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} f(x) dx$$

حساب التكاملين السابقين باستعمال المكاملة بالتجزئة.

$$\mathcal{A}(\lambda) = -\int_0^{\frac{5}{2}} (2x-5)(1-e^{-x}) dx + \int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} (2x-5)(1-e^{-x}) dx$$

$$\text{نضع } v'(x) = 1 - e^{-x} \text{ و } u(x) = 2x - 5$$

الدالة  $u$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و الدالة  $v$  مستمرة على  $\mathbb{R}$

$$\text{إذن } v(x) = x + e^{-x} \text{ و } u'(x) = 2$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} (2x-5)(1-e^{-x}) dx = \left[(2x-5)(x+e^{-x})\right]_0^{\frac{5}{2}} - \int_0^{\frac{5}{2}} 2(x+e^{-x}) dx$$

$$= \left[(2x-5)(x+e^{-x}) - (x^2 - 2e^{-x})\right]_0^{\frac{5}{2}}$$

$$= \left[(2x-3)e^{-x} + x^2 - 5x\right]_0^{\frac{5}{2}} = 2e^{-\frac{5}{2}} - \frac{13}{4}$$

$$\int_0^{\frac{5}{2}} (2x-5)(1-e^{-x}) dx = 2e^{-\frac{5}{2}} - \frac{13}{4} \text{ ينتج أن}$$

$$\int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} (2x-5)(1-e^{-x}) dx = \left[(2x-5)(x+e^{-x}) - (x^2 - 2e^{-x})\right]_{\frac{5}{2}}^{\lambda}$$

$$= \left[(2x-3)e^{-x} + x^2 - 5x\right]_{\frac{5}{2}}^{\lambda}$$

$$= (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 2e^{-\frac{5}{2}} + \frac{25}{4}$$

$$\int_{\frac{5}{2}}^{\lambda} (2x-5)(1-e^{-x}) dx = (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 2e^{-\frac{5}{2}} + \frac{25}{4} \text{ ينتج أن}$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = -\left(2e^{-\frac{5}{2}} - \frac{13}{4}\right) + (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 2e^{-\frac{5}{2}} + \frac{25}{4} \text{ إذن}$$

$$= (2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 4e^{-\frac{5}{2}} + \frac{19}{2}$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = 4\left[(2\lambda-3)e^{-\lambda} + \lambda^2 - 5\lambda - 4e^{-\frac{5}{2}} + \frac{19}{2}\right] \text{ cm}^2 \text{ وبالتالي}$$

• حساب  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\lambda^2 - 5\lambda - 4e^{-\frac{5}{2}} + \frac{19}{2}\right) = +\infty \text{ و } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (2\lambda-3)e^{-\lambda} = 0 \text{ لدينا}$$

$$\text{إذن } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = +\infty$$



5 عين ثلاثة أعداد حقيقية  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$

حيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 0 و -1

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x+1}$$

احسب عندئذ التكامل  $\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx$

6  $x$  عدد حقيقي و  $I_1$  و  $I_2$  هما التكاملان

التاليان :

$$I_2 = \int_0^{\pi} \sin^2 t dt \quad \text{و} \quad I_1 = \int_0^{\pi} \cos^2 t dt$$

1. احسب  $I_1 + I_2$  و  $I_1 - I_2$

2. استنتج  $I_1$  و  $I_2$

3. تحقق من صحة نتائج ② بالتعبير عن  $\cos^2 t$

و  $\sin^2 t$  بدلالة  $\cos 2t$ .

### استعمال علاقة شال

7 احسب التكاملات التالية :

$$\int_{-2}^4 |x^2 - 4| dx \quad ; \quad \int_{-1}^3 |x - 2| dx$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \left| 2 - \frac{2}{x} \right| dx \quad ; \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}} |\sin t| dt$$

8 1. احسب التكاملين التاليين :

$$\int_{-\frac{1}{2}}^2 (2t + 1) dt \quad \text{و} \quad \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (-2t - 1) dt$$

2. استنتج حساب التكامل التالي :  $\int_{-1}^2 |2t + 1| dt$

### استعمال إيجابية التكامل

9 1. نقبل أن من أجل كل عدد حقيقي  $t$  موجب

$$\ln t \leq t - 1.$$

استنتج، بدون حساب، إشارة التكامل

$$\int_1^x (t - 1 - \ln t) dt \quad \text{حسب قيم العدد } x \text{ الموجب تماما.}$$

2. تحقق أن الدالة  $t \mapsto \frac{1}{2} t^2 - \ln t$

هي دالة أصلية للدالة  $t \mapsto t - 1 - t \ln t$

على المجال  $]0; +\infty[$ .

استنتج حساب التكامل  $\int_1^x (t - 1 - \ln t) dt$

### حساب تكاملات باستعمال دوال أصلية

1 احسب التكاملات التالية :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \quad ; \quad \int_2^4 \frac{1}{x} dx \quad ; \quad \int_{-1}^2 (x^2 + x) dx$$

$$\int_{-3}^{-1} (t+3)^3 dt \quad ; \quad \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad ; \quad \int_{-3}^{-1} \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta \cos^3 \theta d\theta \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos \left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right) dx$$

$$\int_0^1 \frac{2x}{4-x^2} dx \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^{\cos x} dx$$

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx \quad ; \quad \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$$

### استعمال خاصية الخطية

2  $f$  دالة معرفة على المجموعة  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 4} \quad \text{كما يلي :}$$

1. أثبت أنه يوجد عدداً حقيقياً  $\alpha$  و  $\beta$

حيث من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$

$$f(x) = \frac{\alpha}{x-2} + \frac{\beta}{x+2}$$

2. استنتج التكامل  $\int_0^1 f(x) dx$

3 1. تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$

من  $\mathbb{R} - \{-1; 3\}$  :

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{-1}{4(x-3)} - \frac{1}{4(x+1)}$$

2. احسب  $\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx$

4 1. أوجد عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  حيث من

أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1; 0\}$  :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

2. احسب التكامل  $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$

### حساب المساحات

13. المستوي منسوب إلى معلم متعامد

$$\vec{i} \parallel \vec{j} = 5\text{cm} \cdot (O; \vec{i}, \vec{j}) \text{ و متجانس}$$

1. ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  المعرفة على

$$\mathbb{R} \text{ كما يلي : } f(x) = x - x^3.$$

2. احسب بـ  $\text{cm}^2$  : مساحة الحيز المستوي المحدود

بالمنحنى  $(\mathcal{C})$ ، محور الفواصل و المستقيمين ذوي

$$\text{المعادلتين } x = 0 \text{ و } x = 1.$$

14. 1. ارسم المنحنيين  $(\mathcal{C}_f)$  و  $(\mathcal{C}_g)$  المثلين

$$\text{للدالتين } f \text{ و } g \text{ المعرفة كما يلي : } f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{و } g(x) = e^{x-1} \text{ في المستوي المنسوب إلى المعلم}$$

$$(O; \vec{i}, \vec{j}) \text{ المتعامد و المتجانس.}$$

2. احسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنيين

$(\mathcal{C}_f)$  و  $(\mathcal{C}_g)$  و المستقيمين ذوي المعادلتين

$$x = e \text{ و } x = 1.$$

15.  $f$  هي الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = xe^{-x} \text{ و } a \text{ عدد حقيقي موجب تماما.}$$

1. ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

$$\text{الوحدة } 4\text{ cm}.$$

2. احسب مساحة الحيز  $\mathcal{A}(a)$  للمستوي المحدود

بالمنحنى  $(\mathcal{C})$ ، محور الفواصل و المستقيم ذوي

$$\text{المعادلتين } x = 0 \text{ و } x = a.$$

3. احسب نهاية  $\mathcal{A}(a)$  عندما يؤول  $a$  إلى  $+\infty$ .

### حساب القيمة المتوسطة لدالة

10. في كل حالة من الحالات التالية، احسب القيمة

المتوسطة  $u$  للدالة  $f$  بين  $a$  و  $b$ .

$$1. \quad b = 1, \quad a = 0 : f(x) = (x - 2)e^x.$$

$$2. \quad b = 0, \quad a = -\frac{\pi}{2} : f(x) = x \cos x + \sin x.$$

$$3. \quad b = e, \quad a = 1 : f(x) = \left(\frac{1}{2}x - 1\right) \ln x.$$

$$4. \quad b = \pi, \quad a = 0 : f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$5. \quad b = 16, \quad a = 1 : f(x) = \sqrt{x}.$$

$$6. \quad b = 3, \quad a = -3 : f(x) = x^2 - 9.$$

$$7. \quad b = \pi, \quad a = 0 : f(x) = \cos^2 x.$$

$$8. \quad b = \pi, \quad a = 0 : f(x) = \sin^2 x.$$

### المكاملة بالتجزئة

11. احسب التكاملات التالية باستعمال المكاملة

بالتجزئة.

$$\int_0^1 (3 - t) e^t dt \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt$$

$$\int_0^{\pi} (-x + 3) \cos x dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} (3x + 2) \sin x dx$$

$$\int_1^x \ln t dt \quad ; \quad \int_1^x t \ln t dt$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \quad ; \quad \int_0^2 x e^x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x - 1) \sin(2x^2 - x) dx \quad ; \quad \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\ln t}{t^2} dt$$

12. احسب التكاملات التالية باستعمال المكاملة

بالتجزئة مرة واحدة أو أكثر.

$$\int_0^1 (3t^2 - t + 1) e^t dt \quad ; \quad \int_0^1 t^2 e^t dt$$

$$\int_0^{\pi} e^x \cos t dt \quad ; \quad \int_0^1 t^2 e^{3t} dt$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x e^{2x} dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} e^t \sin t dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin 2t dt \quad ; \quad \int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx$$

## تمارين و مسائل

2. احسب مساحة الحيز المستوي  $\mathcal{A}$  المحدود بالمنحنى

$(\mathcal{C})$  و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين

$$x = e^2 \text{ و } x = 1$$

19.  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln|x|}{x^2}$$

$(\mathcal{C}_f)$  هو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب

إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

$m$  عدد حقيقي حيث  $m \geq 1$ .

يرمز  $\mathcal{A}(m)$  إلى التكامل  $\int_1^m |2x - f(x)| dx$

1. احسب  $\mathcal{A}(m)$  باستعمال المكاملة بالتجزئة.

2. احسب، إن وجدت، نهاية  $\mathcal{A}(m)$

عندما يؤول  $m$  إلى  $+\infty$ .

20.  $f$  دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = (2x - 1)e^{-2x}$$

$(\mathcal{C}_f)$  هو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب

إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(الوحدة 2 cm).

1. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

2. ارسم المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  في العلم السابق.

3.  $\lambda$  عدد حقيقي أكبر تماما من  $\frac{1}{2}$

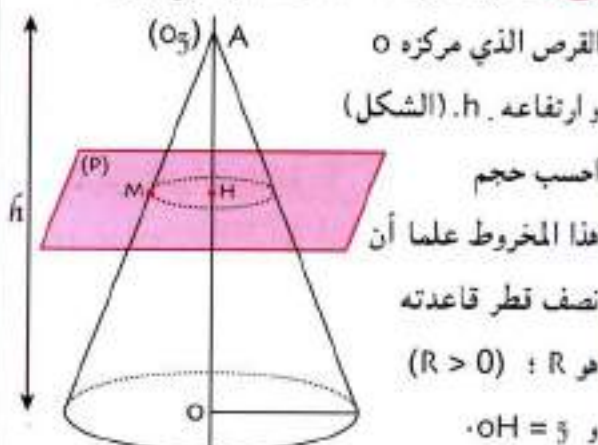
و  $\mathcal{A}(\lambda)$  مساحة الحيز المستوي المحدود

بالمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  و محور الفواصل و المستقيمين

ذوي المعادلتين  $x = \lambda$  و  $x = \frac{1}{2}$ .

## حساب حجم مخروط الدوران

16. مخروط رأسه  $A$  و محوره  $(O_3)$  و قاعدته



القرص الذي مركزه  $O$  و ارتفاعه  $h$ . (الشكل)

احسب حجم

هذا المخروط علما أن

نصف قطر قاعدته

هو  $R$  :  $(R > 0)$

و  $OH = \frac{1}{3}$ .

## مسائل

17. المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j})$  : الوحدة 1 cm.

1. ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  المعرفة

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

على المجموعة  $]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$

2. احسب  $\int_2^3 \ln(x-1) dx$

3. احسب بنفس الكيفية  $\int_2^3 \ln(x+1) dx$

4. احسب مساحة الحيز  $\mathcal{A}$  المحدود بالمنحنى  $(\mathcal{C})$

و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين

$x = 2$  و  $x = 3$ .

18.  $f$  هي الدالة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$(\mathcal{C})$  هو المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب

إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

(الوحدة هي 1 cm).

1. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .



• بواسطة المكاملة بالتجزئة، احسب المساحة  $\mathcal{A}(\lambda)$  بدلالة  $\lambda$ .

• احسب  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$ .

4. • نعتبر الدالتين  $f_1$  و  $H$  المعرفتين على  $\mathbb{R}$

$$f_1(x) = (2x + 1)^2 e^{-4x} \quad \text{كما يلي :}$$

$$H(x) = \left(-x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{8}\right) e^{-4x} \quad \text{و}$$

• يبين أن الدالة  $H$  هي دالة أصلية للدالة  $f_1$  على  $\mathbb{R}$ .

5. • ليكن  $S$  الحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(\mathcal{C})$

ومحور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x = \frac{1}{2}.$$

يرمز  $v$  إلى حجم الجسم المولد من دوران الحيز  $S$  حول محور الفواصل.

نذكر أن  $v$  معبر عنه كما يلي:  $v = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx$

• عيّن القيمة المضبوطة للحجم  $v$  بواسطة وحدة

الحجوم ثم قيصة مقربة للحجم  $v$  إلى  $10^{-3}$ .

21 •  $f$  هي الدالة المعرفة كما يلي :

$$f(x) = x \ln |x| \quad \text{إذا كان } x \in \mathbb{R}^* \quad \text{و} \quad f(0) = 0.$$

1. • هل الدالة  $f$  مستمرة عند العدد 0 ؟

هل هي قابلة للاشتقاق عند 0 ؟

2. • ادرس تغيرات الدالة  $f$  و ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$

الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم

متعامد و متجانس  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

3. • باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب المساحة  $\mathcal{A}$

للحيز المستوي المحدود بالمنحنى  $(\mathcal{C})$  ومحور الفواصل

و المستقيمين ذوي المعادلتين  $x = \frac{1}{e}$  و  $x = 1$ .

22 • لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^+$  كما يلي :

$$f(x) = x \ln x \quad \text{إذا كان } x \in ]0 ; +\infty[ \quad \text{و} \quad f(0) = 0.$$

1. • ادرس استمرارية الدالة  $f$  و قابلية اشتقاقها على

المجال  $[0 ; +\infty[$ .

2. • ادرس تغيرات الدالة  $f$  و ارسم المنحنى  $(\mathcal{C})$

الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم

متعامد و متجانس  $(\vec{i}, \vec{j})$ .

3. • عدد حقيقي من المجال  $]0 ; 1[$ .

احسب، باستعمال المكاملة بالتجزئة، المساحة

$$\mathcal{A}(t) \quad \text{للحيز المستوي المحدود بالمنحنى } (\mathcal{C})$$

و محور الفواصل و المستقيمين ذوي المعادلتين

$$x = t \quad \text{و} \quad x = 1.$$

احسب  $\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{A}(t)$ .

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard\_equation

## حلول التمارين و المسائل

### 01 النهايات - الإستمرارية

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + x + 1) = 3 \quad 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^3 + 3x) = 0 \quad 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 + 3x^2 - 4) = +\infty \quad 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = 0 \quad 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left( \cos \frac{1}{x} - 2 \right) = -\infty \quad 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x-1} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1 \quad 6$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{x-1} = +\infty$$

$$n \leq E(x) < n+1 \quad \text{حيث } n \text{ هو الجزء} \quad 7$$

$$\frac{n}{x} \leq \frac{E(x)}{x} < \frac{n+1}{x} \quad \text{الصحيح للعدد } x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x} = 0 \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x+5} = \frac{4}{7} \quad 8$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x - 10} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{4x^2 + 6x + 9}{2x + 3} = \frac{9}{2} \quad 9$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x = 1 \quad 10$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x-5}{x+1} - \frac{\sin x}{x} \right) = 3 \quad 11$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \quad 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = +\infty \quad 13$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = 1 \quad 14$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{-2 \sin(x - \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}} = -2 \quad 15$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 5x} = \frac{3}{5} \quad 16$$

$$x = 1 \text{ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور الترتيب.}$$

$$y = 1 \text{ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور الفواصل.}$$

$$x = 1 \text{ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي لمحور الترتيب.}$$

$$y = x + 2 \text{ هي معادلة للمستقيم المقارب المائل.}$$

$$y = x + 1 \text{ هي معادلة للمستقيم المقارب المائل.}$$

$$x = 5 \text{ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي}$$

$$\text{محور الترتيب. المنحنى } (C) \text{ يقبل فرع قطع مكافئ بجوار } +\infty \text{ و } -\infty.$$

$$x = -1 \text{ هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي}$$

$$\text{محور الترتيب. المنحنى } (C) \text{ يقبل منحنى تقاربا}$$

$$\text{باتجاه المستقيم ذي المعادلة } y = x.$$

$$22 \text{ المنحنى } (C) \text{ يقبل منحنى تقاربا باتجاه}$$

$$\text{المستقيم ذي المعادلة } y = x \text{ بجوار } +\infty.$$

$$23 \text{ المنحنى } (C) \text{ يقبل مستقيمين مقاربين مائلين}$$

$$\text{معادلتاهما } y = x \text{ و } y = -x.$$

$$24 \text{ المنحنى } (C) \text{ يقبل منحنى تقاربا و هو منحنى}$$

$$\text{المستقيم ذي المعادلة } y = \sqrt{2} x$$

$$\text{و منحنى و المستقيم ذي المعادلة } y = -\sqrt{2} x$$

$$25 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1.1$$

$$2. \text{ إذن } (C) \text{ لا يقبل مستقيما مقاربا بجوار } +\infty.$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = -1 \quad (26)$$

إذن  $f$  مستمرة عند 1.

$$(27) \quad f \text{ ليست معرفة عند العدد } 0 \text{ إذن } f$$

ليست مستمرة عند العدد 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = f(0) \quad (28)$$

إذن  $f$  مستمرة عند العدد 0.

$$(29) \quad f \text{ ليست معرفة عند } 0. \text{ إذن } f \text{ ليست}$$

مستمرة عند 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

$f$  مستمرة عند العدد 0 عن اليمين وعن اليسار.

$$(30) \quad 1. \quad f \text{ معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على } \mathbb{R}.$$

$$2. \quad f \text{ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال } [0; 1]$$

و  $f(0) \times f(1) < 0$  إذن المعادلة  $2x^3 + 5x - 4 = 0$  تقبل حلا واحدا في المجال  $[0; 1]$ .

$$\text{لدينا } f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \text{ و } f\left(\frac{3}{4}\right) > 0.$$

الحل  $x_0$  ينتمي إلى المجال  $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$ .

$$(31) \quad 1. \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما}$$

على  $\mathbb{R}^+$  و متناقصة تماما على  $\mathbb{R}^-$ .

$$2. \quad f \text{ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال } [0; 1]$$

و  $f(0) \times f(1) < 0$  إذن المعادلة  $x^6 + x^2 - 1 = 0$  تقبل حلا واحدا في المجال  $[0; 1]$ .

$$\text{لدينا } f(1) > 0 \text{ و } f\left(\frac{3}{4}\right) < 0.$$

$$(32) \quad 1. \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة ومستمرة على } \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$f$  متزايدة تماما على  $]-\infty; -1[$  و  $[1; +\infty[$ .

$f$  متناقصة تماما على  $[-1; 1]$ .

$$2. \quad f \text{ متناقصة تماما على } [-1; 1] \text{ و مستمرة على}$$

$$[-1; 1] \text{ و } f(-1) \times f(1) < 0$$

إذن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا واحدا في المجال  $[-1; 1]$ .

$$(33) \quad 1. \quad f \text{ معرفة على } ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$$

$$\text{نعتبر الدالة } g \text{ حيث } g(x) = f(x) - 2$$

$g$  مستمرة على  $]-\infty; -1[$  و  $]-1; +\infty[$ .

$$g'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(1+x)^2}$$

$g$  متزايدة على  $]-\infty; -2[$  و  $]0; +\infty[$

$g$  متناقصة على  $[-2; -1]$  و  $[-1; 0]$ .

$$2. \quad g \text{ معرفة، مستمرة ومتزايدة تماما على } [2; 3]$$

$$\text{و } g(2)g(3) < 0$$

إذن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا واحدا في  $[2; 3]$

بالتالي المعادلة  $f(x) = 2$  تقبل حلا واحدا في  $[2; 3]$ .

$$(34) \quad \text{لتكن } f \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي:}$$

$$f(x) = x - \cos x \quad ; \quad f'(x) = 1 + \sin x$$

الدالة  $f$  معرفة ومستمرة ومتزايدة تماما على  $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

إذن المعادلة تقبل حلا واحدا في  $\mathbb{R}$ .

و بالتالي المعادلة  $\cos x = x$  تقبل حلا واحدا في  $\mathbb{R}$ .

$$(35) \quad \text{لتكن } f \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي:}$$

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 2$$

الدالة  $f$  معرفة ومستمرة على  $\mathbb{R}$ .

$$f'(x) = -3x^2 + 4x - 1$$

$f$  متناقصة على  $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$  و  $]-\infty; \frac{1}{3}]$

و متزايدة على  $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$ .

لدينا  $f$  معرفة ومستمرة ومتناقصة تماما على

$$[1; 3] \text{ و } f(1) \times f(3) < 0$$

إذن المعادلة تقبل حلا واحدا في  $[1; 3]$

40. 1. مجموعة تعريف  $f$  هي  $\mathbb{R} - \{-1\}$ .

$$q(x) = \frac{2x+4}{(x+1)^2} : b=1 : a=1$$

$$f(x) = x+1 + \frac{2x+4}{(x+1)^2} \text{ إذن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = 0 \text{ لدينا}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty . 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty : \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

3.  $x = -1$  هي معادلة للمستقيم المقارب الموازي

لمحور الترتيب.

$y = x + 1$  هي معادلة للمستقيم المقارب المائل.

41. حجم المكعب هو  $x^3$ .

حجم المتوازي المستطيلات هو  $3(3x+4)$ .

حل المعادلة  $x^3 = 3(3x+4)$  في  $\mathbb{R}^*$ .

لنكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي :

$$f(x) = x^3 - 9x - 12$$

الدالة  $f$  مستمرة  $\mathbb{R}^*$ ، متزايدة على  $[\sqrt{3}; +\infty[$

و متناقصة على  $[0; \sqrt{3}]$ .

$$f(4) = 16 \text{ و } f(3) = -12$$

$$f(x) = 0 \text{ و بالتالي المعادلة } f(3) \times f(4) < 0$$

تقبل حلا واحدا في المجال  $]3; 4[$ .

$$f(3,6) = 2,256 \text{ و } f(3,5) = -0,625$$

$$f(3,5) \times f(3,6) < 0$$

إذن الحل  $x$  ينتمي إلى المجال  $]3,5; 3,6[$ .

و بالتالي يكون حجم المكعب يساوي حجم متوازي

المستطيلات من أجل قيمة  $x$  حيث

$$3,5 < x < 3,6$$

36. 1.  $f$  معرفة على  $]-\infty; -2[ \cup ]-2; +\infty[$ .

$$c = 19 : b = -9 : a = 5$$

$$f(x) = 5x - 9 + \frac{19}{x+2}$$

2. ( $\mathcal{E}_p$ ) يقبل مستقيما مقاربا يوازي محور

الترتيب معادلته  $x = -2$  و مستقيم مقارب مائلا

( $\Delta$ ) معادلته  $y = 5x - 9$ .

في المجال  $]-\infty; -2[$ ، ( $\mathcal{E}_p$ ) تحت ( $\Delta$ ).

في المجال  $]-2; +\infty[$ ، ( $\mathcal{E}_p$ ) فوق ( $\Delta$ ).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; m = 0 \quad 37$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty : m > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-m)x^2 + 2x - 3}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} - mx}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty : 0 < m < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 : m = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty : m > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty : m < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty : -1 < m < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty : m = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty : m < -1$$

38. الدالة  $x \mapsto x^2 + x + 1$  مستمرة على

$\mathbb{R}$  و الدالة  $\sin$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  الدالة  $h$  هي

مركب الدالتين  $x \mapsto x^2 + x + 1$  و  $x \mapsto \sin x$ .

فهي مستمرة على  $\mathbb{R}$  و بالتالي الدالة  $h$  مستمرة

عند كل عدد حقيقي  $x_0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} \quad 39$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

02 الاشتقاق

1 •  $f'$  قابلة للاشتقاق عند 1 و  $f'(1) = 2$ .

2 •  $f'$  قابلة للاشتقاق عند 5 و  $f'(5) = \frac{9}{4}$ .

3 •  $f'$  قابلة للاشتقاق عند -2 و  $f'(-2) = 192$ .

4 •  $f'$  قابلة للاشتقاق عند 0 و  $f'(0) = -1$ .

5 •  $f'$  قابلة للاشتقاق عند 0 و  $f'(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

6 •  $f'$  قابلة للاشتقاق عند 0 و  $f'(0) = -12$ .

7 •  $f'$  قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليمين و  $f'(0) = 0$ .

8 •  $f$  ليست قابلة للاشتقاق عند 0.

2 • 1  $y = 7x - 14$

2 • المنحنى يقبل نصف مماس بوازيان محور

الترتيب في النقطة ذات الفاصلة 1 معادلاتهما

$x = 1$  حيث  $x \geq 1$  و  $x = 1$  حيث  $x \leq 1$ .

3 •  $y = 12x - 24$  :  $y = -12x + 24$

4 •  $x = 0$  على المجال  $[0; +\infty[$ .

5 • المنحنى يقبل نصف مماس بوازيان محور

الترتيب في النقطة A فاصلتها 2، معادلاتهما

$x = 2$  حيث  $x \geq 2$  و  $x = 2$  حيث  $x \leq 2$ .

6 • المنحنى يقبل نصف مماس معادلاتهما

$y = 4x - 3$  حيث  $x \geq 1$

$y = 1$  حيث  $x \leq 1$

7 • المنحنى يقبل نصف مماس عن اليمين عند نقطة

فاصلتها -2، يوازي محور الترتيب و معادلته

$x = -2$  حيث  $x \geq -2$ .

3 • 1  $f'(x) = \frac{2x^3 + x^2 - 3}{x^2}$  :  $D' = \mathbb{R} - \{0\}$

2 •  $f'(x) = \frac{2x^2 - 8x + 6}{(x-2)^2}$  :  $D' = \mathbb{R} - \{2\}$

3 •  $f'(x) = \frac{-3x^2 + 6x - 4}{4(1-x)^2}$  :  $D' = \mathbb{R} - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{(x+1)^2} : D' = \mathbb{R} - \{-1\} \cdot 4$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2(x+1)^2} : D' = \mathbb{R} - \{-1\} \cdot 5$$

$$f'(x) = 2 + \frac{4}{(1-x)^3} : D' = \mathbb{R} - \{1\} \cdot 6$$

$$f'(x) = 1 + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}} : D' = ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[ \cdot 7$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2}(3x-1)}{2\sqrt{x}} : D' = [0; +\infty[ \cdot 8$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(2+x)^2} \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} : D' = ]-2; 2[ \cdot 9$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \cos \pi x + \left(\frac{2x+1}{4}\right) \pi \sin \pi x : D' = \mathbb{R} \cdot 10$$

$$f'(x) = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} : D' = \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[ \cdot 11$$

$$D' = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\} \cdot 12$$

$$f'(x) = \frac{2(\cos 2x - \sin 2x + 1)}{(1 - \sin 2x)^2}$$

4 •  $f$  مستمرة عند 1.

$f'$  قابلة للاشتقاق عند 1 و  $f'(1) = 0$

$$Df = \mathbb{R} - \{0\} \cdot 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \frac{1}{2} \cdot 2$$

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق عند 0 و  $g'(0) = \frac{1}{2}$

بما أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند 0 فإنها مستمرة عند 0.

$$f'(x) = 3x^2(1-x)^2(1-2x) : D = \mathbb{R} \cdot 1$$

$f$  متزايدة على  $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$

و متناقصة على  $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$



## حلول التمارين و المسائل

**7**  $f$  دالة ناطقة إذن  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$  و قابلة للاشتقاق  $n$  مرة على  $]-\infty; 1[$  و  $]1; +\infty[$ .

من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{1\}$ :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

**8**  $f^{(6)}(x) = 0$  :  $n \geq 6$  • 1

• 2 من أجل كل عدد  $x$  من  $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! 2^n}{(2x-1)^{n+1}}$$

• 3 من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :

$$f^{(n)}(x) = 2^n \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

**9**  $f''(x) = -9 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$-9 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 9 \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

إذن  $f$  حل للمعادلة التفاضلية  $y'' + 9y = 0$ .

**10** • 2

| $x$     | $-\infty$    | 1             | 2            | $+\infty$ |
|---------|--------------|---------------|--------------|-----------|
| $f'(x)$ | -            | -             | -            | -         |
| $f(x)$  | 0<br>↘<br>-∞ | +∞<br>↘<br>-∞ | +∞<br>↘<br>0 |           |

**3**  $(T_A): y = -8x + 12$  :  $A\left(\frac{3}{2}; 0\right)$

• 4 يكفي إثبات أن من أجل كل عدد  $x$  من  $D_f$

$$f(3-x) = -f(x)$$

**11** (أ) • 2 جدول تغيرات  $f$

| $x$     | $-\infty$ | 0  | 1  | $+\infty$ |   |
|---------|-----------|----|----|-----------|---|
| $f'(x)$ | +         | 0  | -  | 0         | + |
| $f(x)$  |           | -1 | -2 | $+\infty$ |   |

**2** •  $f'(x) = 1 - \frac{5}{2\sqrt{x}}$  :  $D = \mathbb{R}_+$

$f$  متزايدة على  $\left[\frac{25}{4}; +\infty\right[$

و متناقصة على  $]0; \frac{25}{4}]$

**3** •  $D = \mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{3(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x-2)^2}$$

$f$  متزايدة على  $]2+\sqrt{3}; +\infty[$  و  $]2-\sqrt{3}; 2[$

$f$  متناقصة على  $]2; 2+\sqrt{3}]$  و  $]2-\sqrt{3}; 2[$

**4** •  $f'(x) = -1 + \frac{8}{x^3}$  :  $D = \mathbb{R} - \{0\}$

$f$  متزايدة على  $]0; 2]$

$f$  متناقصة على  $]2; +\infty[$  و  $]0; -\infty[$

**5** •  $f'(x) = 1 + \cos x$  :  $D = \mathbb{R}$

$f$  متزايدة على  $\mathbb{R}$

**6** •  $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = -\tan^2 x$$

$f$  متناقصة على كل مجال محتوي في  $D$ .

**7** •  $f'(x) = 10x^4 - 20x^3 + 12x^2$  :  $D = \mathbb{R}$

$f$  متزايدة على  $\mathbb{R}$

**8** •  $f'(x) = \frac{7}{(x+1)^2}$  :  $D = \mathbb{R} - \{-1\}$

$f$  متزايدة على  $]-\infty; -1[$  و  $] -1; +\infty[$ .

**9** •  $f'(x) = \frac{-7}{(2x-5)^2}$  :  $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

$f$  متناقصة على  $]-\infty; \frac{5}{2}[$  و  $]\frac{5}{2}; +\infty[$ .

**10** •  $f'(x) = 12x^2 - 12x$  :  $D = \mathbb{R}$

$f$  متزايدة على  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0]$

$f$  متناقصة على  $[0; 1]$

## حلول التمارين و المسائل

$b \in \mathbb{R} : f(x) = 6\sqrt{x} + b$  . 4

$b \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\sin 2x + b$  . 5

$b \in \mathbb{R} , a \in \mathbb{R} : f(x) = ax + b$  . 6

$c \in \mathbb{R} , b \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$  . 7

$c \in \mathbb{R} , b \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + bx + c$  . 8

$f(x) = \frac{1}{12}x^3 - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + bx + c$  . 9

$c \in \mathbb{R} , b \in \mathbb{R}$

$f(x) = -\frac{9}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{3}x + bx + c$  . 10

$c \in \mathbb{R} , b \in \mathbb{R}$

$f''(x) = \frac{2}{(x-a)^3} : f'(x) = \frac{-1}{(x-a)^2}$  . 14

$f'''(x) = \frac{-6}{(x-a)^4}$

$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-a)^{n+1}}$  . 2

$g(x) = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1}$  . 3

$g^{(n)}(x) = \frac{-\frac{1}{2}(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} + \frac{\frac{1}{2}(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$

$h(x) = (x-1)(2x^2 + 5x + 5)$  . (ب) 15

$h(x) > 0$  من أجل  $x > 1$

$h(x) = 0$  من أجل  $x = 1$

$h(x) < 0$  من أجل  $x < 1$

$f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$  . 2

| x       | $-\infty$ | -1        | 1 | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|---|-----------|
| $f'(x)$ | -         | -         | 0 | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $+\infty$ | 2 | $+\infty$ |

$f(x) = x^2 - x + \frac{4}{(x+1)}$  . (ب)  
 $c = 4 : b = -1 : a = 1$

$f(x) - g(x) = \frac{4}{x+1}$  . جا

$f$  مستمرة و متزايدة تماما على  $[1,6 ; 1,7]$

$f(1,6) f(1,7) < 0$  و

إذن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا واحد  $\alpha$  حيث

$1,6 < \alpha < 1,7$

ب) 1

| x       | $-\infty$ | -1        | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|----------|-----------|
| $g'(x)$ | -         | -         | 0        | +         |
| $g(x)$  | 0         | $+\infty$ | $\beta$  | 0         |

$\beta = g(\alpha) : 1,6 < \alpha < 1,7$

$(\Delta) : y = -x + 1$  . 2

$d(x) = g(x) - (-x + 1) = \frac{(x-1)x^3}{x^3 + 1}$  نضع . 3

إذا كان  $0 \leq x \leq 1$  فإن  $d(x) \leq 0$

إذا كان  $-1 < x \leq 0$  فإن  $d(x) \geq 0$

$\begin{cases} y = g(x) \\ y = -x + 1 \end{cases}$  حل للجملته (1 ; 0)

$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$  هي (T) معادلة . 4

$b = 0 : a = 4$  . 1 12

$f(x) = \frac{3x^2 + 4x}{x^2 + 1}$  . 2

| x       | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | 2 | $+\infty$ |
|---------|-----------|----------------|---|-----------|
| $f'(x)$ | -         | 0              | 0 | -         |
| $f(x)$  | 3         | -1             | 4 | 3         |

(ع) يقبل مستقيما مقاربا بوازي محور الفواصل

معادلته  $y = 3$

$a \in \mathbb{R} : f(x) = a$  . 1 13

$b \in \mathbb{R} : f(x) = -5x + b$  . 2

$b \in \mathbb{R} : f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - x + b$  . 3

03 الدوال الأصلية

1 الدالة  $F$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$

1.  $F'(x) = 3x^2 - 1 = f(x)$

إذن  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

2. الدالة  $F$  معرفة وقابلة للاشتقاق

على  $]-1; +\infty[$  و  $F'(x) = \sqrt{x+1} = f(x)$

إذن  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $]-1; +\infty[$

3. الدالة  $F$  معرفة وقابلة للاشتقاق

على  $]0; +\infty[$  و  $F'(x) = 2\left(x - \frac{1}{x^3}\right) = f(x)$

إذن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$

على  $]0; +\infty[$

4. الدالة  $F$  معرفة وقابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ .

و  $F'(x) = \cos x - x \sin x = f(x)$

إذن الدالة  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

2 الدالة  $F: x \mapsto 2\sin^2 x$

هي دالة أصلية للدالة  $f$  حيث  $f(x) = 2 \sin 2x$

على  $\mathbb{R}$  لأن الدالة  $L$  معرفة وقابلة للاشتقاق

على  $\mathbb{R}$  و  $L'(x) = f(x)$ .

3. 1.  $F(x) = -\frac{7}{12} + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$

2.  $F(x) = 1 + \cos 2x$

3.  $F(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sin 3x$

4.  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} - 2\sqrt{x} + \frac{7}{2}$

4. 1. الدوال  $F$  حيث  $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + x + c$

هي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  :  $c \in \mathbb{R}$

2.  $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{x} + c$

3.  $F(x) = -\cos x - 2 \sin x + c$

4.  $F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{3}x^3 + c$

5.  $F(x) = 4 \sin\left(\frac{x-\pi}{4}\right) + c$

6.  $F(x) = x - \tan x + c$

7.  $F(x) = \frac{1}{5}(x-3)^5 + c$

8.  $F(x) = -\frac{1}{3} \cos^3 x + c$

9.  $F(x) = \frac{2}{3}(x^2+4)^3 + c$

10.  $F(x) = -\frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^5 + c$

11.  $F(x) = \frac{2}{3}(\sqrt{x}+1)^3 + c$

12.  $F(x) = -\frac{1}{(x-3)} + c$

13.  $F(x) = -\frac{1}{\sin x} + c$

14.  $F(x) = \frac{1}{\cos x} + c$

15.  $F(x) = 2\sqrt{x+1} + c$

16.  $F(x) = 2\sqrt{3 + \sin x} + c$

17.  $F(x) = -\sqrt{1-x^2} + c$

18.  $F(x) = x \sin x + c$

19.  $F(x) = \frac{\sin x}{x} + c$

20.  $F(x) = x\sqrt{1+x^2} + c$

5. 1.  $F(x) = \frac{1}{4} \sin^4 x + c$

2.  $F(x) = -\frac{1}{3} \cos^3 x + c$

3.  $F(x) = \frac{1}{3} \sin^3 x + c$

4.  $F(x) = \frac{-5}{4(x+5)^4} + c$

5.  $F(x) = x^2 + 3x + c$

6.  $F(x) = \frac{-1}{3(1+x^3)} + c$

7.  $F(x) = \frac{1}{4} \sqrt{4x^2+1} + c$

6  $F'(x) = f(x)$

إذن  $F$  هي دالة أصلية للدالة  $f$  على  $]-1; +\infty[$ .

7  $F'(x) = f(x)$  على  $\mathbb{R}$ .

الدوال  $x \mapsto -x^3 + 2x^2 + x - 1 + c$  هي الدوال

الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .



الدوال الأسية 04

$e^x e^{-2x} = e^{-x} ; e^{2x} e^{3x} = e^{5x}$  1

$(e^x)^{-2} = e^{-2x} ; (e^{3x})^2 = e^{6x} ; e^{1-x} e^{3x+3} = e^{2x+4}$

$\frac{e^{0.2}}{e^{0.2}} = e^{0.4} ; \frac{e^6}{e^2} = e^3 ; e^{\frac{1}{2}} e^{-2} = e^{-\frac{3}{2}}$

$b = -1$  و  $a = 1$  2

$c = -4 ; b = 0 ; a = 1$  3

$\lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$  4

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x+1} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1+e^x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (2xe^{3x} - 5e^x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2 + x - 5)e^x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x+1} = 0$

$f'(x) = 2e^x ; D = \mathbb{R} ; f(x) = 2e^x$  5

$f'(x) = -e^{3-x} ; D = \mathbb{R} ; f(x) = e^{3-x}$

$f'(x) = \frac{\sqrt{e^x}}{2} ; D = \mathbb{R} ; f(x) = \sqrt{e^x}$

$f'(x) = (-x^2 + 4x - 2)e^x ; D = \mathbb{R} ; f(x) = (x^2 - 2x)e^x$

$f'(x) = \frac{4e^x}{(1-e^x)^2} ; D = \mathbb{R}^* ; f(x) = \frac{5e^x - 1}{1-e^x}$

$f'(x) = 3e^{3x+1} ; D = \mathbb{R} ; f(x) = e^{3x+1}$

$f'(x) = 2 \cos 2x e^{\sin 2x} ; D = \mathbb{R} ; f(x) = e^{\sin 2x}$

$f'(x) = (3x+4)e^x ; D = \mathbb{R} ; f(x) = (3x+1)e^x$

$f'(x) = (\sin x + \cos x)e^x ; D = \mathbb{R} ; f(x) = e^x \sin x$

$f(x) = e^{-x} (\cos 3x - \sin 3x)$

$f'(x) = e^{-x} (-4 \cos 3x - 2 \sin 3x) ; D = \mathbb{R}$

حل المعادلة  $e^x = 1$  هو 0. 6

حلا المعادلة  $e^x = e^{25}$  هما 5 و -5.

حلا المعادلة  $e^{5x-1} = e^{x^2+5}$  هما 2 و 3.

حلول المعادلة  $e^{\cos x} = e^{\cos x}$  هي الأعداد  $x$

حيث  $k \in \mathbb{Z} ; x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

حل المعادلة  $e^x + 1 = \frac{2}{e}$  هو 0.

$c \in \mathbb{R} ; F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + c \cdot 1$  8

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c \cdot 2$

$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x + c \cdot 3$

$F(x) = -\frac{1}{x^2} + c \cdot 4$

$F(x) = \frac{3}{2x^2} + \sin x + c \cdot 5$

$F(x) = 12\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c \cdot 6$

$F(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \sin(3x + \frac{\pi}{6}) + c \cdot 7$

$F(x) = 2\sqrt{4 + \sin x} \cdot 1$  9

2. الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

هي الدوال  $c \in \mathbb{R} ; x \mapsto 2\sqrt{4 + \sin x} + c$

$F(x) = x + \frac{27}{2x^2} \cdot 1$  10

إذن  $b = \frac{27}{2}$  و  $a = 1$

$c \in \mathbb{R} ; G(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{27}{2x} + c \cdot 2$

$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{27}{2x} + 14 \cdot 3$

$G(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 1) + c \cdot 1$  11

$F(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 1) - 1 \cdot 2$

12. العبارة الخطية لـ  $\cos^3 x$  و  $\cos^3 x$

هما  $\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x$

$\sin^3 x = -\frac{1}{4} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x$

الدوال  $x \mapsto \frac{1}{12} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x + c$

هي الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

الدوال  $x \mapsto -\frac{1}{12} \cos 3x - \frac{3}{4} \cos x + c$

هي الدوال الأصلية للدالة  $g$  على  $\mathbb{R}$ .

## حلول التمارين و المسائل

$$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(x) dx = e^{\lambda} + e^{-\lambda} - 2 \quad .6$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = +\infty$$

$$f(0) = 0 \quad : \quad \mathbf{11} \quad f \text{ معرفة على } \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$$

$f$  متزايدة تماما على  $\mathbf{R}$

$$(T) : y = 5x \quad .2$$

| $x$                 | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---------------------|-----------|-----|-----------|
| $4e^{2x} + e^x - 5$ | -         | 0   | +         |
| $f(x) - 5x$         | +         | 0   | +         |

( $\mathcal{C}$ ) فوق ( $T$ ) في المجال  $]-\infty; +\infty[$

( $T$ ) يقطع ( $\mathcal{C}$ ) في النقطة  $O(0; 0)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad .2 \quad D = \mathbf{R} \quad \mathbf{12}$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \quad .4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad .3$$

$f'(x) > 0$  على  $\mathbf{R}$  :  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbf{R}$

$$f(x) + f(-x) = 1 \quad .5 \quad \text{يكفي إثبات أن}$$

$$(T) : y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \quad .6$$

$$e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x - 1)^2 \quad (i) \quad .7$$

$$g(0) = \frac{1}{2} - f(0) \quad ; \quad g'(x) = \frac{1}{4} - f'(x) \quad \text{ب)}$$

تغيرات  $g$  ملخصة في الجدول التالي

| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $g'(x)$ |           | +   | +         |
| $g(x)$  | $-\infty$ | 0   | $+\infty$ |

(ج) ( $\mathcal{C}$ ) تحت ( $T$ ) في المجال  $]0; +\infty[$

( $\mathcal{C}$ ) فوق ( $T$ ) في المجال  $]-\infty; 0[$

( $\mathcal{C}$ ) يقطع ( $T$ ) عند النقطة  $A(0; \frac{1}{2})$

$$\text{المعادلة } \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 \text{ لا تقبل حلا في } \mathbf{R}$$

$$\text{حل المعادلة } e^{4x} - e^{2x} = 0 \text{ هو } 0$$

$$\text{حل المعادلة } e^x + e^{-x} = 2 \text{ هو } 0$$

$$\text{حل المعادلة } e^{2x} + 2e^x - 3 = 0 \text{ هو } 0$$

$$\text{حل المعادلة } e^{2x} + 5e^x - 6 = 0 \text{ هو } 0$$

$$\mathbf{7} \quad \text{مجموعة حلول المتراجحة } e^x \geq \sqrt{e} \text{ هي } [\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$\text{مجموعة حلول المتراجحة } e^{x^2+2} \leq e^{4-x} \text{ هي } [-3; 2]$$

$$\text{مجموعة حلول المتراجحة } e^{2x} - e^x < 0 \text{ هي } ]-\infty; 0[$$

$$\text{مجموعة حلول المتراجحة } e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0 \text{ هي } [0; +\infty[$$

$$\text{مجموعة حلول المتراجحة } e^{4x} + 5e^{2x} - 6 \leq 0 \text{ هي } ]-\infty; 0]$$

$$\text{مجموعة حلول المتراجحة } e^{x^2} e^x < (e^3)^2 \text{ هي } ]-3; 2]$$

$$\text{مجموعة حلول المتراجحة } e^{2x} > e^{x+1} \text{ هي } ]1; +\infty[$$

$$\mathbf{8} \quad f(x) = e^{-x} \quad ; \quad F(x) = -e^{-x}$$

$$F(x) = \frac{1}{6}e^{3x} - \frac{5}{2}e^{2x} \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{2}e^{3x} - 5e^{2x}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} \quad ; \quad f(x) = xe^{x^2}$$

$$F(x) = -e^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$$

$$F(x) = \frac{1}{e^x + 3} \quad ; \quad f(x) = \frac{-e^x}{(e^x + 3)^2}$$

$$\mathbf{9} \quad b = -3 \quad ; \quad a = 2$$

$$\mathbf{10} \quad \text{حل المعادلة } f(x) = 0 \text{ هو } 0$$

$$\mathbf{2} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ هو } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $f'(x)$ |           | +   | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | 0   | $+\infty$ |

$$\mathbf{5} \quad k < 0 : \text{المعادلة } f(x) = k \text{ تقبل حلا واحدا سالبا}$$

$$k = 0 : \text{المعادلة } f(x) = 0 \text{ تقبل حلا واحدا هو } 0$$

$$k > 0 : \text{المعادلة } f(x) = k \text{ تقبل حلا واحدا موجبا}$$

## حلول التمارين و المسائل

3. حسب السؤال 2، لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،

$$f(x) > 0 \text{ أي } \frac{e^x}{e^x - x} > 0$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

4. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(x) = \frac{1}{1 - xe^{-x}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

| $x$     | $-\infty$ | 1               | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------------|-----------|
| $f'(x)$ | +         | 0               | -         |
| $f(x)$  | 0         | $\frac{e}{e-1}$ | 1         |

6. المستقيم ذو المعادلة  $y = 0$  مستقيم مقارب

للمنحنى  $(\mathcal{C})$  بجوار  $-\infty$ .

المستقيم ذو المعادلة  $y = 1$  مستقيم مقارب للمنحنى

$(\mathcal{C})$  بجوار  $+\infty$ .

| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ |           | +         |
| $f(x)$  | -1        | 1         |

$$f(x) = 1 - \frac{2}{e^x + 1} : a = 1, b = -2$$

4. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f(-x) = -f(x)$

و بالتالي  $f$  فردية على  $\mathbb{R}$ .

5.  $f''$  تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 0

إذن النقطة ذات الفاصلة 0 نقطة إنعطاف  $(\mathcal{C})$ .

6. تنعدم  $y = \frac{1}{2}x$  : (T)

$$I_1 = \int_0^1 xe^{-x} dx = -\frac{2}{e} + 1 \quad 1. \quad 13$$

2. نستعمل المكاملة بالتجزئة لحساب  $I_{n+1}$ .

$$I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$$

$$I_2 = -\frac{1}{e} + 2I_1 = -\frac{5}{e} + 2$$

$$I_3 = -\frac{1}{e} + 3I_2 = -\frac{16}{e} + 6$$

| $x$     | $-\infty$ | 1             | $+\infty$ |
|---------|-----------|---------------|-----------|
| $f'(x)$ | +         | 0             | -         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\frac{1}{e}$ | 0         |

$$A(\lambda) = 1 - (1 + \lambda)e^{-\lambda} \quad 3.$$

أو أيضا  $A(\lambda) = 16 [1 - (1 + \lambda)e^{-\lambda}] \text{ cm}^2$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^\lambda} - \frac{\lambda}{e^\lambda}\right) = 1$$

| $x$     | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---------|-----------|---|-----------|
| $g'(x)$ | -         | 0 | +         |
| $g(x)$  | $+\infty$ | 0 | $+\infty$ |

لدينا  $g(0) = 0$ .

2. ينتج أن  $g(x) \geq 0$  أي  $e^x - x - 1 \geq 0$

و بالتالي  $e^x - x \geq 1$  أي  $e^x > \frac{e^x}{e^x - x} \geq 1$

إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $\frac{e^x}{e^x - x} > 0$



## حلول التمارين و المسائل

| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ |           | -         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | 0         |

• المستقيم ذو المعادلة  $y = 0$  مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$  بجوار  $+\infty$ .

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  . المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل فرع قطع مكافئ بجوار  $-\infty$ .

7. الدالة  $f(x) - 3 \rightarrow x$  معرفة، مستمرة و متناقصة تماما على  $[0; \pi]$

$$(f(0) - 3)(f(\pi) - 3) < 0 \quad \text{و}$$

إذن المعادلة  $f(x) - 3 = 0$  تقبل حلا واحدا في  $]0; \pi[$ .

أي المعادلة  $f(x) = 3$  تقبل حلا واحدا  $\alpha$  حيث  $0 < \alpha < \pi$ .

### 05 الدوال اللوغاريتمية

$$\ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 0 \quad \text{1}$$

$$4\ln(\sqrt{2}+1) + 4\ln(\sqrt{2}-1) - 5\ln 2 = -\ln 32$$

$$\frac{\ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1)}{2} = \ln \sqrt{2}$$

$$\frac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) - \frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1) = 0$$

$$2\ln e^4 = 8 \quad ; \quad 8 - \ln \frac{1}{e} = 9$$

7. في المجال  $]0; +\infty[$ ، (T) فوق  $(\mathcal{C})$

في المجال  $]0; -\infty[$ ، (T) تحت  $(\mathcal{C})$  و عند النقطة  $O(0; 0)$ ، (T) يقطع  $(\mathcal{C})$ .

17. 1. مجموعة التعريف هي  $\mathbb{R}$ .

2. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $1 < 2 + \cos x < 3$  و  $e^{1-x} > 0$  . إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $(2 + \cos x) e^{1-x} > 0$  و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f(x) > 0$ .

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) . 3$$

$$= \sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} \leq \cos x + \sin x \leq \sqrt{2} \quad , \quad x \text{ عدد حقيقي}$$

و بالتالي  $2 - \sqrt{2} \leq 2 + \cos x + \sin x \leq 2 + \sqrt{2}$  أي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$2 + \cos x + \sin x > 0 \quad ; \quad (2 - \sqrt{2} > 0)$$

$$1 \leq 2 + \cos x \leq 3 . 4$$

$$\text{إذن } e^{1-x} < (2 + \cos x) e^{1-x} < 3e^{1-x}$$

أي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $e^{1-x} < f(x) < 3e^{1-x}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$f'(x) = -(2 + \cos x + \sin x) e^{1-x} . 5$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) < 0$  و بالتالي  $f$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$ .

## حلول التمارين و المسائل

7 • مجموعة حلول المعادلة

$$\ln(2x+7) = \ln(x-3) \text{ هي } \emptyset$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$\ln x + \ln(3x+2) = \ln(2x+3) \text{ هي } \{1\}$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$\ln(x-3) = \ln(x+7) - \ln(x+1) \text{ هي } \{5\}$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$\ln(x^2 - 2x - 3) = \ln(x+7) \text{ هي } \{-2; 5\}$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$\ln\left(\frac{x+7}{x+1}\right) = \ln(x+3) \text{ هي } \{1\}$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \ln(x+2) \text{ هي } \left\{-\frac{4}{3}\right\}$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$\frac{1}{2}\ln(x-1) + \ln(x+1) = 2 + \ln\sqrt{1+x}$$

$$\text{هي } \{\sqrt{1+e^4}\}$$

$$8 \bullet c = 2 : b = -11 : a = 12 \bullet 1$$

$$P(x) = (x+1)(12x^2 - 11x + 2)$$

$$P(x) = 0 \text{ هي } \left\{-1; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}\right\}$$

• مجموعة حلول المعادلة

$$12(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 9\ln x + 2 = 0$$

$$\text{هي } \left\{\frac{1}{e}; e^{\frac{2}{3}}; e^{\frac{1}{4}}\right\}$$

$$\ln a^2 b^3 = 2\ln a + 3\ln b \quad 2$$

$$6\ln \frac{1}{\sqrt{a^2 b}} = -6\ln a - 3\ln b$$

$$\ln 500 = 2\ln 2 + 3\ln 5 \quad 3$$

$$\ln 6,25 = 2\ln 5 - 2\ln 2 : \ln \frac{16}{25} = 4\ln 2 - 2\ln 5$$

$$\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100} = -2\ln 2 - 2\ln 5$$

$$n \geq 1 : n \geq 10 : n \geq 4 : n \leq 9 \quad 4$$

$$5 \bullet \{e^2\} \text{ هي } \ln x = 2 \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\{e^{-2}\} \text{ هي } \ln x = -2 \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\{\sqrt{e}\} \text{ هي } \ln x = \frac{1}{2} \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\{e^2; -e^2\} \text{ هي } \ln|x| = 2 \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\{e^2; -e^2\} \text{ هي } \ln x^2 = 4 \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\{e^2; -e^2\} \text{ هي } [\ln(x)]^2 = 4 \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$6 \bullet \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\ln(1-x) = 2\ln 3 - 3\ln 2 \text{ هي } \left\{-\frac{1}{8}\right\}$$

$$\ln(1-x)^2 = 4\ln 2 \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\text{هي } \{-3; 5\}$$

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -3\ln 2 \text{ هي } \{-7\} \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

$$\ln\sqrt{1-x} = \frac{1}{2}\ln 3 \text{ هي } \{-2\} \text{ مجموعة حلول المعادلة}$$

## حلول التمارين والمسائل

• مجموعة حلول الجملة  $\begin{cases} 2\ln x + 3\ln y = -2 \\ 3\ln x + 5\ln y = -4 \end{cases}$

هي  $\{(e^2; e^{-2})\}$

• مجموعة حلول الجملة  $\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln \frac{2}{3} \\ x + y = \frac{4}{3} \end{cases}$

هي  $\emptyset$

• مجموعة حلول الجملة  $\begin{cases} 5x + 4y = 12 \\ \ln(x-1) + \ln y = \ln 3 - \ln 5 \end{cases}$

هي  $\left\{\left(\frac{9}{5}; \frac{3}{4}\right); \left(\frac{8}{5}; 1\right)\right\}$

• مجموعة حلول الجملة  $\begin{cases} \ln(x^2 - y^2) = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

هي  $\left\{\left(\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}\right)\right\}$

12  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + (\ln x)^2} = +\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 + (\ln x)^2} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2\ln x) = +\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} (x - 2\ln x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2} = 1$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2} = 1$

13  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x - \ln x} = 0$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \ln x}{1 + x} = +\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} = 0$

:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{2x-3}{x}\right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - (\ln x)^2] = +\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1 + 2e^x}{e^{2x} - 1}\right) = -\infty$

9 • مجموعة حلول المتراجحة  $\ln(3-x) \leq 0$  هي  $[-2; 3]$

• مجموعة حلول المتراجحة  $\ln\left(\frac{x+1}{2x+1}\right) \geq 0$  هي  $\left]-\frac{1}{2}; 0\right]$

• مجموعة حلول المتراجحة  $\ln(x+2) + \ln(3+x) > 0$  هي  $\left]-\frac{5+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right[$

• مجموعة حلول المتراجحة  $\ln(x^2 - 4) > \ln(6x+5)$  هي  $]3 + 3\sqrt{2}; +\infty[$

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(2x-5) + \ln(x+1) \leq 2\ln 2$  هي  $\left] \frac{5}{2}; 3 \right]$

10 • مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(x+1) > \ln(4x-1) - \ln(x-1)$  هي  $]4; +\infty[$

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(x^2 + 11x + 30) > \ln(x + 14)$

هي  $]-14; -8[ \cup ]-2; +\infty[$

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln(x^2 - 2e^2) \leq \ln x + 1$  هي  $[e\sqrt{2}; 2e]$

• مجموعة حلول المتراجحة

$\ln\left(\frac{x+1}{3x-5}\right) \geq 0$  هي  $\left] \frac{5}{3}; 3 \right]$

11 • مجموعة حلول الجملة  $\begin{cases} x + y = 30 \\ \ln x + \ln y = 3\ln 6 \end{cases}$  هي  $\{(12; 18); (18; 12)\}$

• مجموعة حلول الجملة  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \ln x + \ln y = \ln 2 \end{cases}$  هي  $\{(2; 1); (1; 2)\}$



## حلول التمارين والمسائل

$$D = ]0; +\infty[ : f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} \left( 1 \cdot \frac{1}{2} \ln x \right)$$

$$b = 5 : a = -2 : D = \mathbb{R} \quad 15$$

$$f(x) = -2 + \frac{5e^x}{2e^x + 1}$$

$$F(x) = -2x + \frac{5}{2} \ln(2e^x + 1) \text{ حيث } F \text{ الدالة}$$

المعرفة على  $\mathbb{R}$  هي دالة أصلية للدالة  $f$ .

$$f(x) = e^x - \frac{4e^x}{e^x + 4} : b = -4 : a = 1 \quad 16$$

الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  حيث  $F(0) = 0$  معرفة

$$F(x) = e^x - 4 \ln(e^x + 4) - 1 + 4 \ln 5 \text{ كما يلي}$$

$$a = \frac{2}{3} \sqrt{2} \text{ إذن } \left( \frac{\sqrt[6]{6} (\sqrt[3]{2})^2 \sqrt{12}}{\sqrt[3]{3^4} \sqrt[3]{6^2}} \right)^6 = \frac{2^9}{3^6} \quad 17$$

$$a = \frac{6^{\frac{1}{6}} \times (2^{\frac{1}{3}})^2 \times 12^{\frac{1}{2}}}{(3^4)^{\frac{1}{3}} [(6^2)^{\frac{1}{3}}]^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3} \sqrt{2}$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2} : \sqrt[4]{81^3} = 27 : \sqrt[3]{8} = 2 \quad 18$$

$$\frac{(\sqrt[3]{4})^2 \sqrt[4]{2}}{\sqrt[10]{4^3}} = 2^{\frac{59}{60}} : \frac{\sqrt[5]{4^2} \sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{8}} = 2^{\frac{1}{20}}$$

19

• مجموعة حلول المعادلة  $4^x + 3 \times 2^x + 10 = 0$  هي  $\emptyset$ .

• مجموعة حلول المعادلة  $9^x - 3^{x+2} = \frac{3^5}{4}$

هي  $\left\{ \frac{\ln 27 - \ln 2}{\ln 3} \right\}$

$$D = \left] \frac{1}{5}; +\infty \right[ : f(x) = \ln(5x - 1) \quad 14$$

$$f'(x) = \frac{5}{5x - 1}$$

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{7}{2} \right\} : f(x) = \ln|7 - 2x|$$

$$f'(x) = \frac{-2}{7 - 2x}$$

$$D = ]-\infty; -1[ \cup ]2; +\infty[ : f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$$

$$f'(x) = \frac{-3}{(x+1)(x-2)}$$

$$D = ]0; +\infty[ : f(x) = x^2 \ln x$$

$$f'(x) = x(1 + 2 \ln x)$$

$$D = \mathbb{R} : f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$D = \mathbb{R} : f(x) = 3x + \ln(1 + e^{-2x})$$

$$f'(x) = 3 - \frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

$$D = \mathbb{R}^* : f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\right)$$

$$f'(x) = \frac{4e^{2x}}{e^{4x} - 1}$$

$$f(x) = \ln(4x^2 - 3x - 1)$$

$$D = \left] -\infty; -\frac{1}{4} \right[ \cup ]1; +\infty[$$

$$f'(x) = \frac{8x - 3}{4x^2 - 3x - 1}$$

$$D = ]-1; +\infty[ : f(x) = x^2 \ln(1 + x)$$

$$f'(x) = 2x \ln(1 + x) + \frac{x^2}{1 + x}$$

## حلول التمارين والمسائل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

$$D = ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[ \quad ; \quad f(x) = \frac{x^x}{\ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

**22** الدالة  $F$  حيث  $F(x) = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}}$  هي دالة

أصلية للدالة  $f$  حيث  $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$  على  $]0; +\infty[$ .

الدالة  $F$  حيث  $F(x) = \frac{2}{7} x^3 \sqrt{x}$  هي دالة أصلية

للدالة  $f$  حيث  $f(x) = x^2 \sqrt{x}$  على  $]0; +\infty[$ .

الدالة  $F$  حيث  $F(x) = \frac{1}{\ln 5} \cdot 5^x$  هي دالة أصلية

للدالة  $f$  حيث  $f(x) = 5^x$  على  $\mathbb{R}$ .

**23**  $D = \mathbb{R} - \{0\}$  . 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad . 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

3. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم !

$$f'(x) = 2 \left( \ln |x| + \frac{x-1}{x} \right)$$

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$       | $1$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----------|-----|-----------|
| $f'(x)$ | +         | +    | -         | 0   | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $0$  | $+\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

4.  $f(x) = 0$  يعني  $x = 1$  أو  $x = -1$ .

مجموعة حلول المعادلة

$$\left\{ \frac{3}{2} \right\} \text{ هي } \frac{1}{2} \cdot 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^x$$

مجموعة حلول المعادلة  $x^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^x$  هي  $\{1\}$

(يمكن الاعتماد على الحل البياني).

**20**  $D = \mathbb{R}_+^*$  :  $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = (\ln 2) 2^x : D = \mathbb{R} : f(x) = 2^x$$

$$D = \mathbb{R} : f(x) = x^2 3^x$$

$$f'(x) = x 3^x (2 + x \ln 3)$$

$$f'(x) = (1 + \ln x) x^x : D = \mathbb{R}_+^* : f(x) = x^x$$

$$D = \mathbb{R}_+^* - \{1\} : f(x) = (\ln x)^x$$

$$x > 1 \text{ حيث } f'(x) = \left( \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right) (\ln x)^x$$

$$D = ]-\infty; -1[ \cup ]0; +\infty[ : f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$f'(x) = \left[ \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x+1}\right) \right] \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

**21**  $D = ]0; +\infty[$  :  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$D = ]0; +\infty[ : f(x) = x^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$D = ]-\infty; -1[ \cup ]0; +\infty[ : f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

4. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$f(x) = 4x - 4 + \ln(1 + e^{-3x})$$

(لاحظ أن  $1 + e^{-3x} = \frac{e^{3x} + 1}{e^{3x}}$  واستعمل خواص الدالة  $\ln$ ).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-3x}) = 0 \quad 5.$$

6. المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 4x - 4$

هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(\mathcal{C})$  بجوار  $+\infty$ .

$$E = ]\ln \sqrt{2} ; +\infty[ \quad 26$$

$$\lim_{x \rightarrow \ln \sqrt{2}} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad 2.$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $E$  :

$$f'(x) = \frac{-14e^{2x}}{(e^{2x} + 5)(e^{2x} - 2)}$$

| $x$     | $\ln \sqrt{2}$ | $+\infty$ |
|---------|----------------|-----------|
| $f'(x)$ |                | -         |
| $f(x)$  | $+\infty$      | $0$       |

$$g'(x) = f'(x) - 1 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad 3.$$

الدالة  $g$  متناقصة تماما على  $E$  :  $\lim_{x \rightarrow \ln \sqrt{2}} g(x) = +\infty$

| $x$    | $\ln \sqrt{2}$ | $+\infty$ |
|--------|----------------|-----------|
| $g(x)$ | $+\infty$      | $-\infty$ |

المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا واحدا  $\alpha$  حيث  $\alpha > \ln \sqrt{2}$

المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقطع المستقيم ذا المعادلة  $y = x$

في نقطة واحدة فاصلتها  $\alpha$  حيث  $\alpha > \ln \sqrt{2}$ .

$$D_f = ]-\infty ; -1[ \cup ]1 ; +\infty[ \quad 24$$

2. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D_f$  ،  $D_f \in (-x)$

و  $f(-x) = -f(x)$  المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل مركز تناظر وهو المبدأ  $O$ .

3.  $x = -1$  :  $x = 1$  :  $y = 0$  هي معادلات

المستقيمات المقاربة للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

$$f'(x) = \frac{2}{(x-1)(x+1)} \quad 4$$

| $x$     | $-\infty$ | $-1$      | $1$       | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ | +         |           |           | +         |
| $f(x)$  | $0$       | $+\infty$ | $-\infty$ | $0$       |

$$(\Delta): y = \frac{2x}{(e-1)(e+1)} - \frac{2e}{(e-1)(e+1)} + \ln\left(\frac{e-1}{e+1}\right) \quad 5.$$

25 1. معرفة على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد

$$f'(x) = 1 + \frac{3e^{3x}}{1 + e^{3x}} \quad \text{حقيقي } x :$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) > 0$

إذن  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{3x}) = 0 \quad 2$$

3.  $f(x)$  من الشكل  $ax + b + \varphi(x)$

حيث  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

إذن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x - 4$  مستقيم

مقارب مائل للمنحنى  $(\mathcal{C})$  بجوار  $-\infty$ .



06 المتتاليات العددية

1  $(u_n)$  هي متتالية أعداد موجبة.

1.  $u_0 = 2$  إذن  $0 < u_0 < 3$

. نفرض أن من أجل عدد طبيعي  $n : 0 < u_n < 3$

إذن  $6 < u_n + 6 < 9$

$0 < \sqrt{6} < \sqrt{u_n + 6} < \sqrt{9}$  بالتالي  $0 < u_{n+1} < 3$

. إذن من أجل عدد طبيعي  $n : 0 < u_n < 3$

2.  $u_1 = \sqrt{u_0 + 6} = \sqrt{8}$  إذن  $u_1 > u_0$

نفرض أن من أجل عدد طبيعي  $n : u_n > u_{n-1}$

$$u_{n+1}^2 = u_n + 6$$

$$u_n^2 = u_{n-1} + 6$$

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n - u_{n-1}$$

بما أن  $u_n - u_{n-1} > 0$  فإن  $u_{n+1}^2 > u_n^2$

أي  $u_{n+1} > u_n$

. إذن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما.

2  $(u_n)$  متتالية أعداد موجبة.

1.  $u_0 = 1$  إذن  $u_0 < 2$

. نفرض أن من أجل عدد طبيعي  $n : u_n < 2$

نبرهن أن  $u_{n+1} < 2$  .  $u_n < 2$  إذن  $2 + u_n < 4$

بالتالي  $\sqrt{2 + u_n} < 2$  ينتج أن  $u_{n+1} < 2$

$$2. \text{ لدينا } u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{2 + u_n + u_n}}$$

هذا العدد موجب تماما من أجل كل عدد طبيعي  $n$ .

ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n < u_{n+1}$

بالتالي  $(u_n)$  متزايدة.

$$3. u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5} \text{ و } u_0 = 9$$

1. يمكن استعمال الاستدلال بالتراجع.

2. احسب الفرق  $u_{n+1} - u_n$

و أدرس إشارة  $-u_n^2 + u_n + 5$

$$4. u_{n+1} = 2u_n - 3 \text{ و } u_0 = 2$$

لاحظ أن  $2u_n - 3 = 6 - 2^{n+1}$  و  $2u_n - 3 = 3 - 2^{n+1}$

أي  $u_{n+1} = 3 - 2^{n+1}$  (باستعمال الاستدلال بالتراجع).

$$5. u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{4 + u_n} \text{ و } u_0 = 1$$

$$1. \text{ لاحظ أن } u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{4 + u_n} = 1 - \frac{3}{4 + u_n}$$

. نبرهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$u_n \geq 0$  . ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$1 - \frac{3}{4 + u_n} \leq 1 \text{ أي } u_{n+1} \leq 1$$

2. الدالة  $x \mapsto \frac{3+x}{4+x}$  متزايدة على المجال  $[0, 1]$ .

(استعمال الدالة المشتقة).

3. المتتالية  $(u_n)$  متناقصة على  $\mathbb{N}$ .

## حلول التمارين و المسائل

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 \quad (11)$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 \quad (12) \text{ لاحظ أن}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (n+1)^3$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4}$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} \text{ و } u_1 = 2, u_0 = 1 \quad (13)$$

$$u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1} \quad \text{لاحظ أن}$$

$$u_2 - u_1 = u_1 - u_0$$

$$u_3 - u_2 = u_2 - u_1$$

$$u_4 - u_3 = u_3 - u_2$$

$$u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$$

و بالجمع طرفا لطرف و التبسيط نجد

$$u_{n+1} - u_1 = u_n - u_0$$

$$u_{n+1} = u_n + 1 \quad \text{أي}$$

إذن  $(u_n)$  متتالية حسابية حدها الأول  $u_0 = 1$  و أساسها  $a = 1$ .

• من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n = n + 1$

•  $(u_n)$  متزايدة و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

$$u_{n+1} = 1 - 2u_n \text{ و } u_0 = 2 \quad (14)$$

$M_n(u_n; u_{n+1})$  هي نقطة من التمثيل البياني.

$\dots : M_3(7; -13) : M_1(-3; 7) : M_0(2; -3)$

$$\text{العدد } 1 - 4^1 \text{ مضاعف العدد } 3. \quad (6)$$

$$4^{n+1} - 1 = 4(4^n) - 1$$

$$= (3+1)4^n - 1$$

$$= 3 \times 4^n + (4^n - 1)$$

$$\text{العدد } 7 \times 3^0 + 4 \text{ يقبل القسمة على } 11. \quad (7)$$

نفرض أن  $7 \times 3^{5n} + 4$  يقبل القسمة على 11.

$$7 \times 3^{5n+5} + 4 = 7 \times 3^{5n} \times 3^5 + 4 \quad \text{لدينا}$$

$$= 7 \times 3^{5n} \times 243 + 4$$

$$= 7 \times 3^{5n} \times (242 + 1) + 4$$

$$= (11 \times 22 \times 7 \times 3^{5n}) + (7 \times 3^{5n} + 4)$$

ينتج أن العدد  $7 \times 3^{5n+5} + 4$  يقبل القسمة على 11.

$$\text{الخاصية محققة من أجل } n = 0. \quad (8)$$

نفرض أن  $4^n - 3n - 1$  يقبل القسمة على 9

$$\text{لدينا } 4(4^n - 3n - 1) = 4^{n+1} - 3(n+1) - 1 - 9n$$

$$\text{أي } 4^{n+1} - 3(n+1) - 1 = 4(4^n - 3n - 1) + 9n$$

نستنتج أن  $4^{n+1} - 3(n+1) - 1$  يقبل القسمة على 9.

$$\text{من أجل } n = 0, n^3 - n \text{ يقبل القسمة على } 3. \quad (9)$$

$$\text{لاحظ أن } (n+1)^3 - (n+1) = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$$

$$= 3k_1 + 3k_2 = 3k'$$

$$\text{من أجل } n = 0, (1+a)^0 \geq 1. \quad (10)$$

نفرض أن  $(1+a)^n \geq 1 + na$  حيث  $n$  عدد طبيعي

$$\text{لدينا } (1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a)$$

$$(1+an)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$$

$$M_1\left(-\frac{1}{2}; 3\right) : M_0\left(3; -\frac{1}{2}\right)$$

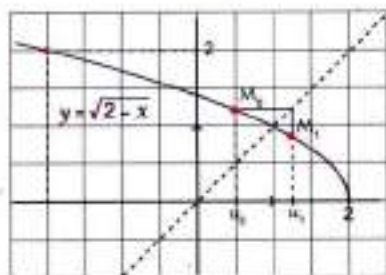
$$M_4\left(-\frac{1}{2}; 3\right) : M_2\left(3; -\frac{1}{2}\right)$$

$u_n = 3$  من أجل  $n$  زوجي

$u_n = -\frac{1}{2}$  من أجل  $n$  فردي

التخمين :  $(u_n)$  ليس متقاربة و ليس لها نهاية.

$$u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \text{ و } u_0 = \frac{1}{2} \quad (16)$$



$$M_0\left(\frac{1}{2}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

$$M_1\left(\sqrt{\frac{3}{2}}; u_3\right)$$

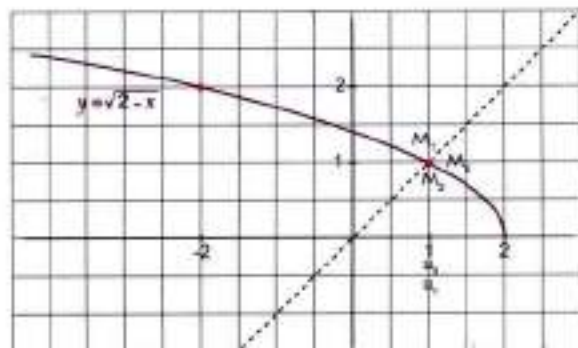
$$M_2(u_3; u_4)$$

$(u_n)$  متقاربة ونهايتها  $l$  تحقق  $f(l) = l$

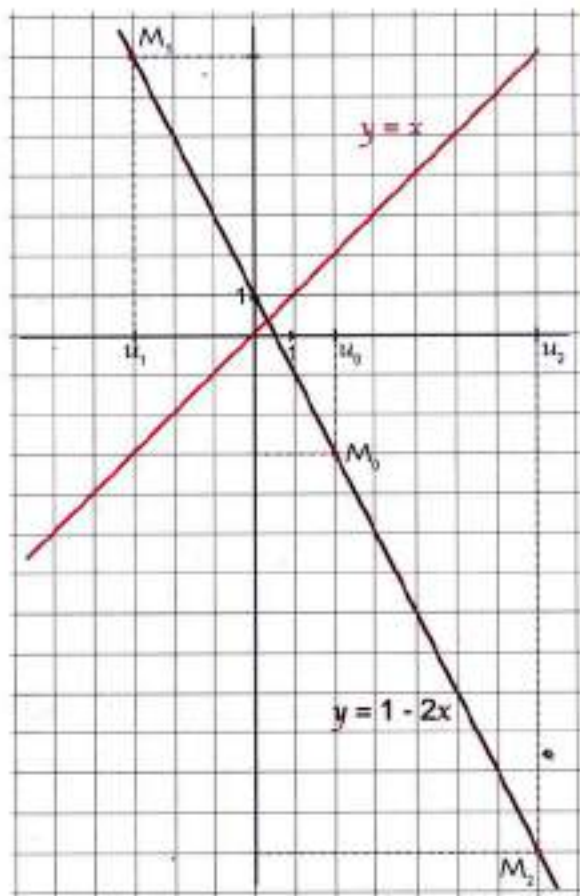
أي  $\sqrt{2-l} = l$  ونجد  $l = 1$  إذن  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$

$$u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \text{ و } u_0 = 1 \quad (17)$$

$$M_2(1; 1) : \dots M_2(1; 1) : M_1(1; 1) : M_0(1; 1)$$



المتتالية ثابتة  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$



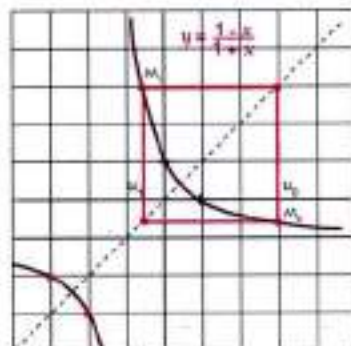
التخمين : المتتالية  $(u_n)$  ليست متقاربة.

حدود المتتالية  $(u_n)$  متناوبة في الإشارة والنقط  $M_n$

تبتعد أكثر فأكثر في الجهتين.

المتتالية  $(u_n)$  ليس لها نهاية.

$$u_{n+1} = \frac{1 - u_n}{1 + u_n} \text{ و } u_0 = 3 \quad (15)$$





$$u_0 = \frac{1}{7} \quad (20)$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + \frac{1}{2} \quad \text{من أجل كل } n \in \mathbb{N}$$

$$u_n \leq \frac{3}{4} \quad \text{نبرهن بالتراجع على } \mathbb{N} \text{ أن}$$

$$(u_n) : u_n = \frac{n+1}{n} \quad (21) \quad \text{متناقصة ومتقاربة}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \quad \text{و}$$

$$(v_n) : v_n = -n \quad \text{متناقصة ومتباعدة}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \quad \text{و}$$

$$(u_n) : u_n = 2^{n-1} \quad (22) \quad \text{متتالية هندسية حدها الأول}$$

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{و أساسها } q = 2 \quad u_n \text{ متزايدة وغير}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \quad \text{ومتقاربة}$$

$$(v_n) : v_n = \frac{1}{3^{n-1}} \quad \text{متتالية هندسية حدها الأول}$$

$$v_0 = 3 \quad \text{و أساسها } q = \frac{1}{3} \quad \text{المتتالية } (v_n) \text{ متناقصة}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \quad \text{ومتقاربة}$$

$$u_n = \frac{-1}{2^{n-1}} \quad (23)$$

$$(u_n) \text{ متزايدة ومتقاربة و } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

$$(v_n) : v_n = (-2)^{n-1} \quad \text{المتتالية } (v_n) \text{ غير رتيبة ومتباعدة}$$

$$(v_n) \text{ ليس لها نهاية}$$

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad (24)$$

$$u_n = f(n) \text{ من الشكل } u_n = f(n) \quad \text{من دراسة تغيرات } f$$

$$(u_n) \text{ متناقصة}$$

$$(u_n) \text{ يمكن استعمال الاستدلال بالتراجع}$$

$$1. \quad \frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n} \quad (18)$$

$$\text{من أجل } n \geq 1 : \frac{1}{n} \leq 1 \quad \text{و} \quad \frac{2}{n} \leq 2$$

$$\text{و بالتالي } 1 \leq u_n \leq 3 \quad \text{أي } (u_n) \text{ محدودة}$$

$$2. \quad u_n = \frac{n^2+1}{n}$$

$$= n + \frac{1}{n}$$

$$\text{من أجل كل } n \in \mathbb{N}^* : 2 \leq u_n$$

$$(u_n) \text{ محدودة من الأسفل}$$

$$3. \quad u_n = \frac{n+3}{2n-1}$$

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير منعدم : } u_n \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{و } u_0 = -3 \quad \text{إذن } (u_n) \text{ محدود من الأسفل بالعدد } -3$$

$$1. \quad u_n = \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \quad (19)$$

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير منعدم}$$

$$0 < \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} < 1$$

$$\text{إذن } (u_n) \text{ محدودة}$$

$$2. \quad u_n = \sqrt{n^2+1} - n$$

$$\text{من أجل كل } n \in \mathbb{N} : 0 \leq \sqrt{n^2+1} - n \quad \text{و } u_n = f(n)$$

$$\text{إذن } (u_n) \text{ محدودة من الأسفل بالعدد } 0$$

$$3. \quad u_n = 4^n - 3^n$$

$$\text{من أجل كل } n \in \mathbb{N} : 0 \leq 4^n - 3^n$$

$$(u_n) \text{ محدودة من الأسفل بالعدد } 0$$

## حلول التمارين والمسائل

**29**  $u_n = \frac{n^4}{n!}$  حيث  $n$  عدد طبيعي.

من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n \geq 0$ .

إذن  $(u_n)$  محدودة من الأسفل و متناقصة بدءاً من  $u_3$ .  
عند استعمال الاستدلال بالتراجع لاحظ أن  $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$   
إذن  $(u_n)$  متقاربة و  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

**30**  $u_0 = 2$  و  $2u_n = u_{n+1} + 1$  و  $v_n = u_n - 1$

1. نجد  $v_{n+1} = 2v_n$  . إذن  $(v_n)$  متتالية هندسية

حيث  $v_0 = 1$  و  $q = 2$ .

2. لدينا  $v_n = 2^n$ .

إذن  $u_n = 2^n - 1$

بما أن  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = +\infty$  فإن  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ .

**31**  $u_0 = 3$  و  $u_n = \frac{1}{3} u_{n-1} - 4$

1.  $(u_n)$  متناقصة. (استعمال الاستدلال بالتراجع)

2.  $v_n = u_n + 6$  نبرهن أن  $v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n$ .

حيث  $(v_n)$  متتالية هندسية.  $v_0 = 9$  و  $q = \frac{1}{3}$

و  $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3.  $(v_n)$  متتالية هندسية مع  $0 < q < 1$  و  $v_0 = 9$

إذن  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$  و  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -6$ .

**32**  $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$  و  $v_n = \frac{2n+2}{n+2}$

المتتالية  $(u_n)$  متزايدة لأن الدالة المرفقة بها

متزايدة على  $[0; +\infty[$ . المتتالية  $(v_n)$  متناقصة

لأن الدالة المرفقة بها متناقصة على  $[0; +\infty[$ .

2.  $(u_n)$  متناقصة و محدودة من الأسفل، فهي

متقاربة و  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

**25** 1.  $q = \frac{1}{3}$  و  $u_0 = -2$  .  $0 < q < 1$

و  $u_0 < 0$ . إذن المتتالية الهندسية متناقصة.

2.  $u_0 = \frac{1}{3}$  و  $q = -\frac{\sqrt{1}}{3}$ .

$q < 0$  إذن المتتالية  $(u_n)$  ليست رتيبة.

**26** 1.  $v_0 = 1$  و  $q = 2$

$v_0 > 0$  و  $q > 1$  إذن المتتالية الهندسية  $(v_n)$  متزايدة.

2.  $v_0 = -1$  و  $q = -3$

$q < 0$  المتتالية الهندسية  $(v_n)$  ليست رتيبة.

**27** 1.  $u_0 = 1$  و من أجل عدد طبيعي  $n$  :

$u_{n+1} = \sqrt{n+7}$  لاحظ أن  $\sqrt{n+6} < \sqrt{n+7}$

إذن  $(u_n)$  متزايدة.

2.  $v_0 = 8$  و  $v_{n+1} = \sqrt{3v_n + 1}$

باستعمال الاستدلال بالتراجع يمكن إثبات

أن  $(v_n)$  متناقصة.

**28**  $u_n = 1 + n + \sin n$

1.  $n \leq u_n \leq 2 + n$

2. المتتاليتان الحسابيتان  $(v_n)$  و  $(w_n)$  معرفتان

كما يلي :  $v_n = 2 + n$  و  $w_n = n$

لدينا  $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = +\infty$

إذن  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n} \text{ و } u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad (35)$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2}$$

إذن  $u_{n+1} - u_n > 0$  متزايدة.

$$v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(u_n + \frac{1}{n}\right)$$

$$= (u_{n+1} - u_n) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{n - n - 1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n - n - 1}{n(n+1)^2} = \frac{-1}{n(n+1)^2}$$

إذن  $v_{n+1} - v_n < 0$  متناقصة.

لدينا  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$  و  $v_n - u_n = \frac{1}{n}$

إذن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان متجاورتان.

$$u_2 = 13 : u_1 = 6 : u_0 = 1 \quad (36)$$

$$u_4 = 41 : u_3 = 24$$

3.2 - نستعمل الاستدلال بالتراجع.

$$u_0 = 1 \quad .4$$

$$u_1 = u_0 + 1^2 = 1 + 5$$

$$u_2 = u_1 + 2^2 = 2 + 5$$

$$\vdots$$

$$u_n = u_{n-1} + n^2 = n + 5$$

$$(u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}) + u_n = 1 + (u_0 + \dots + u_{n-1})$$

$$+ (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

$$- (1 + 2 + \dots + n) + 5n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 2 : u_n - v_n = \left(-\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2}\right)$$

إذن المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 2$$

$$v_n = \frac{3n^2 + 4}{n^2 + 1} \text{ و } u_n = \frac{3n + 4}{n + 1} \quad (33)$$

كل من  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متناقصة.

إذن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  غير متجاورتين.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \quad (34)$$

من أجل كل عدد طبيعي  $n$ ،  $\frac{1}{(n+1)!} > 0$

إذن  $(u_n)$  متزايدة.  $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{n+1}{n \cdot (n+1)!}$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{(n+1)(n+1)!}$$

وبعد التبسيط نجد  $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{(n+1)! \cdot n \cdot (n+1)}$

إذن  $v_{n+1} - v_n < 0$  وبالتالي  $(v_n)$  متناقصة.

لدينا  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0 : v_n - u_n = -\frac{1}{n \cdot n!}$

$(u_n)$  متزايدة و  $(v_n)$  متناقصة و  $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n - u_n) = 0$

إذن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان متجاورتان.



## حلول التمارين والمسائل

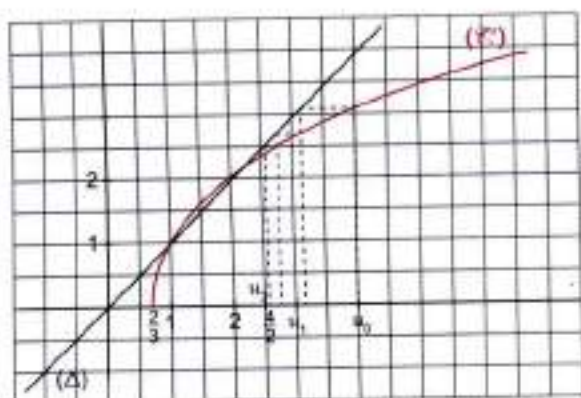
5.  $(u_n)$  متزايدة ومحدودة من الأعلى إذن  $(u_n)$  متقاربة.

لايجاد نهاية  $(u_n)$  عند  $+\infty$ ، نحل المعادلة  $l = f(l)$  ونجد  $l = \sqrt{3}$ .

38. 1.  $u_2 = \sqrt{3\sqrt{10} - 2}$  ;  $u_1 = \sqrt{10}$  ;  $u_0 = 4$

$$u_3 = \sqrt{\sqrt{3\sqrt{10} - 2} - 2}$$

2. (أ - ب).



(ج) المتتالية  $(u_n)$  متقاربة.

3. ثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$u_n \geq 2 \text{ لدينا } u_0 \geq 2$$

بفرض  $u_n \geq 2$  ينتج أن  $3u_n - 2 \geq 4$  أي  $\sqrt{3u_n - 2} \geq 2$

4. من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{\sqrt{3u_n - 2} + u_n} \leq 0$$

وبالتالي  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  إذن  $(u_n)$  متناقصة.

5.  $(u_n)$  متناقصة ومحدودة من الأسفل

إذن  $(u_n)$  متقاربة.

6.  $l = 2$

بعد التبسيط نجد :

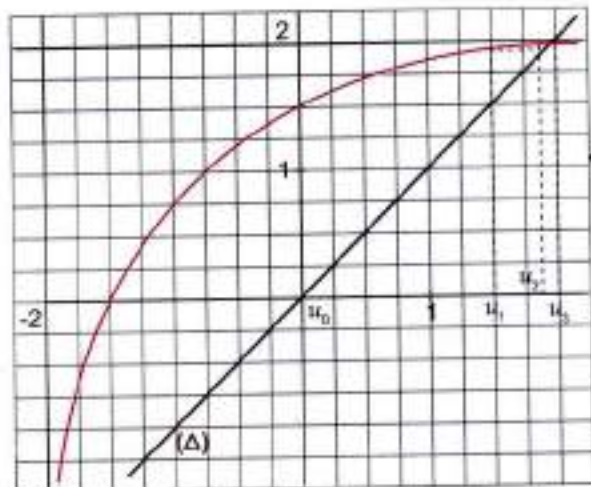
$$u_n = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + 5n$$

$$u_n = 1 + 5n + \frac{(n-1)(n)(n+1)}{3} \quad \text{أي}$$

5.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  إذن  $(u_n)$  ليست متقاربة.

37. 1.  $u_3 = \frac{45}{26}$  ;  $u_2 = \frac{12}{7}$  ;  $u_1 = \frac{3}{2}$  ;  $u_0 = 0$

2. (أ - ب).



(ج) المتتالية  $(u_n)$  متقاربة.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3 - u_n^2}{u_n + 2} \quad 3.$$

نبرهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$3 - u_n^2 > 0$  وأن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$u_n + 2 \geq 0$$

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1 + u_n}{2 + u_n} \quad 4.$$

نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_n \leq 2$

$$\alpha = 1 : \beta = -1 : \gamma = 1 \quad \text{5}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)} dx = \left[ -\frac{1}{x^2} - \ln|x| - \ln|x+1| \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} + \ln \frac{3}{4}$$

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{2} \sin 2x : I_1 + I_2 = x \cdot 1 \quad \text{6}$$

$$I_1 = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x : I_2 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \quad \text{.2}$$

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2} : \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2} \quad \text{.3}$$

(استعمل العلاقتين السابقتين).

$$\int_{-2}^4 |x^2 - 4| dx = \frac{64}{3} : \int_{-1}^3 |x - 2| dx = 5 \quad \text{7}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 |2 - \frac{2}{x}| dx = 1 : \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}} |\sin t| dt = 2$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2} (-2t - 1) dt = \frac{1}{4} \cdot 1 \quad \text{8}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 (2t + 1) dt = \frac{25}{4}$$

$$\int_{-1}^2 |2t + 1| dt = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} (-2t - 1) dt + \int_{\frac{1}{2}}^2 (2t + 1) dt \quad \text{.2}$$

$$= \frac{13}{2}$$

$$\int_1^x (t - 1 - \ln t) dt \leq 0 : 0 \leq x \leq 1 \quad \text{9}$$

$$\int_1^x (t - 1 - \ln t) dt \geq 0 : x \geq 1$$

2. من أجل كل عدد حقيقي  $t$  موجب تماما :

$$\left( \frac{1}{2} t^2 - t \ln t \right)' = t - 1 - \ln t$$

$$\int_1^x (t - 1 - \ln t) dt = \left[ \frac{1}{2} t^2 - t \ln t \right]_1^x$$

$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x - x \ln x$$

## 07 الحساب التكاملي

$$\int_2^4 \frac{1}{x} dx = \ln 2 : \int_{-1}^2 (x^2 + x) dx = \frac{9}{2} \quad \text{1}$$

$$\int_{-3}^{-1} \left( -\frac{1}{x^2} \right) dx = -\frac{2}{3} : \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{-3}^{-1} (t + 3)^3 dt = 4 : \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos \left( \frac{1}{2} x + \frac{\pi}{2} \right) dx = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin \theta \cos^3 \theta d\theta = \frac{1}{8}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^{\cos x} dx = -1 + e$$

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln 2 : \int_0^1 \frac{2x}{4 - x^2} dx = \ln \frac{4}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{\pi}{4} : \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{3}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}$$

$$\beta = -\frac{1}{2} : \alpha = \frac{1}{2} \cdot 1 \quad \text{2}$$

$$\int_e^1 f(x) dx = \left[ \frac{1}{2} \ln|x - 2| - \frac{1}{2} \ln|x + 2| \right]_0^1 \quad \text{.2}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln 3$$

3. 1. وحدة المقامات و بسط العبارة.

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx = \left[ \frac{1}{4} (\ln|x - 3| - \ln|x + 1|) \right]_0^2 \quad \text{.2}$$

$$= -\frac{1}{2} \ln 3$$

$$b = -1 : a = 1 \cdot 1 \quad \text{4}$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx = \left[ \ln|x| - \ln|x+1| \right]_1^2 \quad \text{.2}$$

$$= \ln \frac{4}{3}$$

## حلول التمارين والمسائل

$$A = \frac{25}{4} \text{ cm}^2 \quad .2 \quad \textbf{13}$$

$$A = \int_1^e [g(x) - f(x)] dx \quad .2 \quad \textbf{14}$$

$$= e^{e-1} - 2$$

$$A(a) = -(a+1)e^a + 1 \quad .2 \quad \textbf{15}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [-(a+1)e^x + 1] = 1 \quad .3$$

$$\text{إذن } \tau = MH = \frac{R(h-z)}{h} \quad \textbf{16}$$

$$v = \int_0^h S(z) dz = \int_0^h \frac{\pi R^2}{h^2} (h-z)^2 dz = \frac{\pi h R^2}{3}$$

$$\int_2^3 \ln(x-1) dx = 2 \ln 2 - 1 \quad .2 \quad \textbf{17}$$

$$\int_2^3 \ln(x+1) dx = 8 \ln 2 - 3 \ln 3 - 1 \quad .3$$

$$A = \left( \ln \frac{64}{27} \right) \text{ cm}^2 \quad .4$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2} (2 - \ln x) \quad \textbf{18}$$

| x       | 0         | $e^2$         | $+\infty$ |
|---------|-----------|---------------|-----------|
| $f'(x)$ |           | +             | -         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\frac{2}{e}$ | 0         |

$$A = [2\sqrt{x} \ln x]_1^{e^2} - 2 [2\sqrt{x}]_1^{e^2} = 4 \quad .2$$

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2} : [1; m] \quad \textbf{19}$$

$$A(m) = \int_1^m \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{m} \ln m$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} A(m) = 1 \quad .2$$

$$u = -1 \cdot 2 : u = 3 - 2e \cdot 1 \quad \textbf{10}$$

$$u = 0 \cdot 4 : u = \frac{1}{8} \left( \frac{e^2 - 7}{e - 1} \right) \cdot 3$$

$$u = -6 \cdot 6 : u = \frac{14}{5} \cdot 5$$

$$u = \frac{1}{2} \cdot 8 : u = \frac{1}{2} \cdot 7$$

$$\int_0^1 (3-t)e^t dt = 3e - 4 : \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt = \frac{\pi}{2} - 1 \quad \textbf{11}$$

$$\int_0^{\pi} (3x+2) \sin x dx = 3\pi + 4$$

$$\int_0^{\pi} (-x+3) \cos x dx = 2$$

$$\int_1^x t \ln t dt = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4}$$

$$\int_1^x \ln t dt = x \ln x - x + 1$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{2} : \int_0^2 x e^x dx = e^2 + 1$$

$$\int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt = 1 - \frac{2}{e}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4x-1) \sin(2x^2-x) dx = -\cos\left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$\int_0^1 t^2 e^t dt = e - 2 \quad \textbf{12}$$

$$\int_0^1 (3t^2 - t + 1) e^t dt = 4e - 8$$

$$\int_0^1 t^2 e^{3t} dt = \frac{5e^3 - 2}{27}$$

$$\int_0^{\pi} e^t \sin t dt = \frac{1}{2} (e^{\pi} + 1) : \int_0^{\pi} e^t \cos t dt = -\frac{1}{2} (e^{\pi} + 1)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x e^{2x} dx = \frac{3}{13} (e^{\pi} - e^{-\pi})$$

$$\int_0^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx = \frac{8}{9} e^3 + \frac{4}{9}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin 2t dt = \frac{1}{8} \pi^2 - \frac{1}{2}$$



## حلول التمارين والمسائل

3. على المجال  $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$  ،  $f(x) \leq 0$  .

$$A = \int_{\frac{1}{e}}^1 (-x \ln x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 x \ln x dx \quad \text{إذن}$$

$$A = -\frac{3}{4e^2} + \frac{1}{4} \quad \text{أي}$$

$$\approx 0,148$$

22. 1.  $f(x) = -x \ln x$  على المجال  $]0; 1[$

$$f(1) = 0$$

$$f(x) = x \ln x \quad \text{على } ]1; +\infty[$$

$$f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

إذن  $f$  مستمرة عند 0 عن اليمين وعند 1

وبالتالي  $f$  مستمرة على  $[0; +\infty[$ .

$f$  ليست قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليمين.

$f$  ليست قابلة للاشتقاق عند 1 وبالتالي فلا تقبل

الإشتقاق على  $[0; +\infty[$ .

**ملاحظة:**  $f$  قابلة للاشتقاق على  $]0; 1[$  و  $]1; +\infty[$

$$2. \quad f'(x) = -1 - \ln x \quad \text{على المجال } ]0; 1[$$

$$f'(x) = 1 + \ln x \quad \text{على المجال } ]1; +\infty[$$

| x       | 0 | $\frac{1}{e}$ | 1 | $+\infty$ |
|---------|---|---------------|---|-----------|
| $f'(x)$ |   | +             | - | +         |
| $f(x)$  | 0 | $\frac{1}{e}$ | 0 | $+\infty$ |

3. على المجال  $]0; 1[$  :  $f(x) \geq 0$

$$\text{إذن} \quad A(t) = \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} t^2 \ln t - \frac{1}{4} t^2 + \frac{1}{4}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} A(t) = \frac{1}{4}$$

$$20. \quad 1. \quad f'(x) = 4(1-x)e^{-2x}$$

| x       | $-\infty$ | 1        | $+\infty$ |
|---------|-----------|----------|-----------|
| $f'(x)$ | -         | +        | -         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $e^{-2}$ | 0         |

$$3. \quad A(\lambda) = \frac{1}{2e} - \lambda e^{-2\lambda}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \frac{1}{2e}$$

4. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $H'(x) = h(x)$

إذن  $H$  دالة أصلية لـ  $h$  على  $\mathbb{R}$ .

$$5. \quad v = \pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi}{8} (5e^2 - e^{-2})$$

$$\text{إذن} \quad v = \frac{\pi}{8} (5e^2 - e^{-2}) \approx 18,4 \text{ cm}^3$$

21. 1. معرفة عند 0

$$\text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

إذن  $f$  مستمرة عند 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\infty$$

إذن  $f$  ليست قابلة للاشتقاق عند 0.

$$2. \quad f'(x) = 1 + \ln x \quad \text{على } ]0; +\infty[$$

$$f'(x) = 1 + \ln(-x) \quad \text{على } ]-\infty; 0[$$

| x       | $-\infty$ | $-\frac{1}{e}$ | 0 | $\frac{1}{e}$  | $+\infty$ |
|---------|-----------|----------------|---|----------------|-----------|
| $f'(x)$ | +         | +              | - | -              | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\frac{1}{e}$  | 0 | $-\frac{1}{e}$ | $+\infty$ |



كتاب الرياضيات من سلسلة مدرستي موجه إلى تلاميذ السنة الثالثة من التعليم الثانوي، شعبة العلوم التجريبية. فهو يتماشى مع المنهاج الرسمي المقرر تطبيقه ابتداء من سبتمبر 2007 و يتكفل بالكفاءات القاعدية و الكفاءات الرياضية المصرح بها.

يتضمن كل باب من هذا الكتاب العناصر التالية :

- المعارف الأساسية الواردة في المنهاج.
  - الطرائق التي ينبغي التحكم فيها.
  - تمارين و مسائل مرفقة بحلول مفصلة.
  - تمارين و مسائل مقترحة للحل، توجد حلولها في الصفحات الأخيرة للكتاب.
- يشمل هذا الجزء أكثر من 220 تمريناً و مسألة محلولة.

كما نلفت الانتباه إلى وجود أكثر من 460 تمريناً و مسألة محلولة في الجزأين من الكتاب، تساعد المترشح لامتحان البكالوريا على التحضير الجيد.





أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard\_equation

- التحليل التوفيقي
- الأعداد المركبة
- التشابهات المباشرة
- الاحتمالات
- الهندسة في الفضاء

سلسلة مدرسية

Hard\_equation

# الرياضيات

## 3AS

السنة الثالثة من التعليم الثانوي

### شعبة العلوم التجريبية

- مراجعة الدروس
- تمارين بحلول مفصلة
- مواضيع نموذجية لامتحان البكالوريا مع حلولها

منشورات الشهاب

# تمارين و مسائل محلولة

## الرياضيات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي

شعبة العلوم التجريبية

رابح بناني

مفتش التربية و التكوين

وحسن أودي

مفتش التربية و التكوين

العربي داود

مفتش التربية و التعليم الأساسي

## الجزء 2

• التحليل التوافقي

• الإحتمالات

• الأعداد المركبة

• التشابهات

• الهندسة

منشورات الشهاب



© منشورات الشهاب، 2007

الحجم : 18,5 x 27 - عدد الصفحات : 144

ردمك : 9 - 588 - 63 - 9961

الإيداع القانوني : 2007 - 2419

منشورات الشهاب : 10، نهج إبراهيم غرفاء، باب الواد، الجزائر 16009

site internet : [www.chihab.com](http://www.chihab.com) - E-mail : [chihab@chihab.com](mailto:chihab@chihab.com)

أنجز طبعه على مطابع عمار قرفي - باتنة

# مقدمة

هذا الكتاب في الرياضيات موجه إلى تلاميذ السنة الثالثة من التعليم الثانوي الذين يدرسون بصفة خاصة في شعبة العلوم التجريبية كما يمكن استغلاله من طرف تلاميذ الشعب العلمية و التكنولوجيا.

إن مضامينه مطابقة للمنهاج الرسمي المقرر تطبيقه ابتداء من سبتمبر 2007 و المنجز في إطار إصلاح المنظومة التربوية، و هو يغطي في جزئه الثاني مضامين التعلم المتعلقة بميادين الإحصاء و الاحتمالات و الهندسة.

يعتبر هذا الكتاب وسيلة تعليمية يسمح إستعمالها بتمديد العمل المنجز في القسم و بتدعيم المكتسبات و التدريب على العمل الفردي.

يندرج هذا الإصدار في تصور خاص و مميز للتعلم، يهدف إلى إعطاء الفرصة للتلميذ لممارسة و تعلم البرهنة و تحرير حلول بصفة سليمة، و هذا ما يحضره إلى مختلف التقويمات خلال السنة الدراسية و خاصة الإستعداد الجيد إلى إمتحان شهادة البكالوريا.

يتركب هذا الجزء من 5 أبواب، يشمل كل باب الأجزاء التالية :

- معارف متمثلة في نصوص تعاريف، مبرهنات، نتائج، خواص و ملاحظات، مصاغة بصفة دقيقة و موجزة.
- طرائق مطبقة في وضعيات و جبهة، مرفقة بحلول محررة بواسطة تعبير رياضي سليم، يدركه لتلميذ و يستعمله في وضعيات مماثلة.
- تمارين و حلول نموذجية توظف معارف و طرائق مدروسة، تبين فعاليتها. تعتبر هذه التمارين نماذج يمكن التمرن عليها كثيرا من التحكم في المفاهيم و الطرائق و تذليل الصعوبات التي تتضمنها.
- تمارين و مسائل مقترحة للحل، يتدرب عليها التلميذ. و تسمح مواجهة هذه الوضعيات بتشخيص الصعوبات العنيدة و معالجتها في الوقت المناسب.

أدرجت في الجزء الأخير من هذا الكتاب حلول موجزة للتمارين و المسائل المقترحة في نهاية كل باب، يطلع عليها التلميذ بعد إنجازه لمحاولات قصد مقارنة حله و التحقق من صحته ثم تعديل و تصحيح أخطائه. إن هذا العمل يسمح له بتحسين مردوده و التحكم في الكفاءات القاعدية و الكفاءات الرياضية المصرح بها في المنهاج.

## فهرس الجزء الثاني

| الصفحة                         | المحتويات                                                                                                                | المجال                          |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| 5<br>8<br>12<br>15<br>122      | معارف .....<br>طرائق .....<br>تمارين و حلول نموذجية .....<br>تمارين و مسائل مقترحة .....<br>حلول التمارين المقترحة ..... | 1 - التحليل التوفيقي            |
| 17<br>22<br>33<br>36<br>125    | معارف .....<br>طرائق .....<br>تمارين و حلول نموذجية .....<br>تمارين و مسائل مقترحة .....<br>حلول التمارين المقترحة ..... | 2 - الاحتمالات                  |
| 40<br>48<br>72<br>77<br>130    | معارف .....<br>طرائق .....<br>تمارين و حلول نموذجية .....<br>تمارين و مسائل مقترحة .....<br>حلول التمارين المقترحة ..... | 3 - الأعداد المركبة             |
| 82<br>84<br>91<br>93<br>136    | معارف .....<br>طرائق .....<br>تمارين و حلول نموذجية .....<br>تمارين و مسائل مقترحة .....<br>حلول التمارين المقترحة ..... | 4 - التشابهات المستوية المباشرة |
| 96<br>102<br>113<br>117<br>139 | معارف .....<br>طرائق .....<br>تمارين و حلول نموذجية .....<br>تمارين و مسائل مقترحة .....<br>حلول التمارين المقترحة ..... | 5 - الهندسة في الفضاء           |

**محتويات الجزء الأول :** 1 - النهايات والاستمرارية. 2 - الإشتقاق. 3 - الدوال الأصلية.

4 - الدوال الأسية. 5 - الدوال اللوغارتمية. 6 - المتتاليات العددية. 7 - الحساب التكاملي.



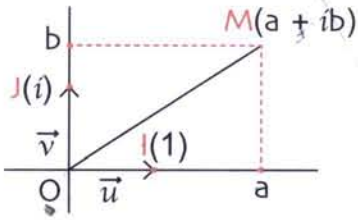
### 1 - الشكل الجبري

#### 1. تعريف

- $a, b$  عددان حقيقيان ،  $i$  العدد المركب حيث  $i^2 = -1$  .  
 الكتابة  $z = a + ib$  تسمى الشكل الجبري للعدد المركب  $z$  .  
 $a = \text{Re}(z)$  و نكتب  $a$  يسمى الجزء الحقيقي للعدد  $z$  و يرمز له  $\text{Re}(z)$  .  
 $b = \text{Im}(z)$  و نكتب  $b$  يسمى الجزء التخيلي للعدد  $z$  و يرمز له  $\text{Im}(z)$  .  
 عندما  $b = 0$  يكون  $z$  حقيقيا . وعندما  $a = 0$  و  $b \neq 0$  يكون  $z = ib$  و يسمى  $z$  عددا تخيليا صرفا .  
 يرمز إلى مجموعة الأعداد المركبة بالرمز  $\mathbb{C}$  .

#### التمثيل الهندسي لعدد مركب

- ملاحظة :** في كل ما يلي المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  .  
 يرفق بكل عدد مركب  $z$  حيث  $z = a + ib$  النقطة  $M$  ذات الإحداثيين  $(a; b)$  .  
 $z$  يسمى لاحقة النقطة  $M$  في  $\mathbb{C}$  .  
 $M$  تسمى صورة العدد المركب  $z$  في المستوي  
 و يرمز لذلك  $M(z)$  .



- حالات خاصة** . صورة العدد 1 هي النقطة  $(1; 0)$  و نكتب  $I(1)$  .  
 محور الفواصل يمثل مجموعة الأعداد الحقيقية .  
 صورة العدد  $i$  هي النقطة  $(0; 1)$  و نكتب  $J(i)$  .  
 محور الترتيب يمثل مجموعة الأعداد التخيلية الصرفة .

#### الحساب في مجموعة الأعداد المركبة

قواعد الجمع و الضرب في مجموعة الأعداد الحقيقية  $\mathbb{R}$  تطبق كما هي في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  مع اعتبار  $i^2 = -1$  . و على الخصوص :

- الفرق  $z' - z$  هو المجموع  $z' + (-z)$  .
- مقلوب عدد مركب غير منعدم  $z = a + ib$  هو  $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib}$  حيث  $\frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$  .
- $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$  ؛  $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab$  .
- $z = a + ib$  عدد مركب حيث  $z = 0$  إذا و فقط إذا كان  $a = 0$  و  $b = 0$  .
- $z' = z$  يعني  $\text{Re}(z) = \text{Re}(z')$  و  $\text{Im}(z) = \text{Im}(z')$  .
- $z' = a' + ib'$  و  $z = a + ib$  عددان مركبان حيث  $z' = z$  إذا و فقط إذا كان  $a = a'$  و  $b = b'$  .

## • الأعداد المركبة والاشعة - لاحقة مرجح

يرفق بكل شعاع  $\vec{u}(x; y)$  العدد المركب  $z = x + iy$ . يسمى  $z$  لاحقة الشعاع  $\vec{u}$ .

### 2. خواص

$\vec{u}, \vec{v}$  شعاعان لاحتقائهما  $z, z'$  على الترتيب،  $\lambda$  عدد حقيقي.

• لاحقة الشعاع  $\vec{u} + \vec{v}$  هي  $z + z'$ .

• لاحقة الشعاع  $\lambda \vec{u}$  هي  $\lambda z$ .

•  $A, B, C$  نقط لواحقها  $z_A, z_B, z_C$  على الترتيب.

• لاحقة الشعاع  $\vec{AB}$  هي  $z_B - z_A$ .

• لاحقة المرجح  $G$  للنقط  $A, B, C$  المرفقة بالمعاملات  $\alpha, \beta, \gamma$  على الترتيب حيث  $\alpha + \beta + \gamma = 0$

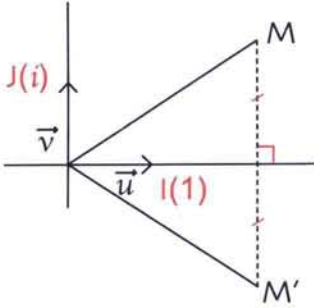
$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} \text{ هي } z_G \text{ حيث}$$

## II - مرافق عدد مركب

### 1. تعريف

مرافق العدد المركب  $z$  حيث  $z = a + ib$  هو العدد المركب الذي يرمز له  $\bar{z}$  حيث  $\bar{z} = a - ib$ .

### • التمثيل الهندسي



في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .  
النقطة  $M'(z)$  هي نظيرة النقطة  $M(z)$  بالنسبة إلى محور الفواصل.

### نتائج

$$1. \bar{\bar{z}} = z$$

$$2. \text{إذا كان } z = a + ib \text{ فإن } z\bar{z} = a^2 + b^2$$

$$3. z + \bar{z} = 2\text{Re}(z) \text{ و } z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$$

$$4. z = \bar{z} \text{ حقيقي يعني}$$

$$5. z = -\bar{z} \text{ تخيلي صرف يعني}$$

### 2. خواص

من أجل كل عددين مركبين  $z$  و  $z'$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم،

$$z = \bar{z} \text{ حقيقي يعني}$$

$$\bar{z}^n = (\bar{z})^n$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$$

$$\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \text{ حيث } \bar{z} \neq 0$$

## III - طولية عدد مركب

### 1. تعريف

طولية العدد المركب  $z$  حيث  $z = a + ib$  هو العدد الحقيقي الموجب الذي يرمز له  $|z|$  والمعرف كما يلي :  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

### التفسير الهندسي

$z$  عدد مركب :  $z = a + ib$  : صورة  $M$  في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . لاحقة  $\vec{OM}$  هي  $z$ .

لدينا  $\|\vec{OM}\| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$  و  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

إذن  $OM = |z|$

نتائج

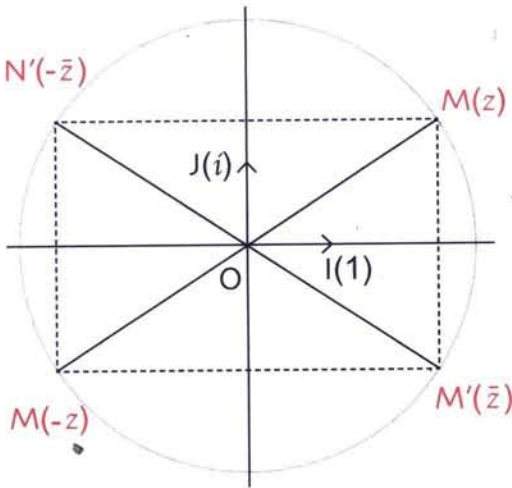
$$|z|^2 = z \bar{z} = a^2 + b^2 \quad 1.$$

2. من أجل كل عدد مركب  $z$ ،  $|z| = 0$  يعني  $z = 0$ .

$$|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}| \quad 3.$$

$$(z \neq 0) \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad 4. \text{ أ.}$$

ب. إذا كان  $|z| = 1$  فإن  $\frac{1}{z} = \bar{z}$



### 2. خواص

من أجل كل عددين مركبين  $z$  و  $\bar{z}$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم،

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

$$|z^n| = |z|^n$$

$$|z z'| = |z| \cdot |z'|$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{حيث } z' \neq 0$$

## IV - عمدة عدد مركب

### 1. تعريف

$z$  عدد مركب غير منعدم صورته النقطة  $M$  في المستوى المنسوب إلى معلم  $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$ .

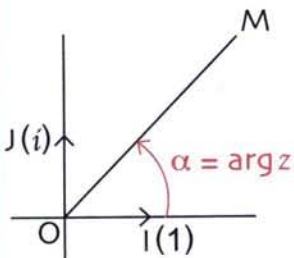
نسمي عمدة  $z$  ونرمز لها  $\arg z$  كل قيس (بالراديان) للزاوية  $(\vec{OI}, \vec{OM})$ .

لكل عدد مركب غير منعدم ما لانهاية من العمدات. فإذا كان  $\theta$  إحداها

$$\text{نكتب } k \in \mathbb{Z} : \arg z = \theta + k2\pi$$

إذا كان  $\alpha$  عددا من بين الأعداد  $\theta + k2\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$

نكتب  $\arg z = \alpha$





## ملاحظات

- العدد 0 ليس له عمدة لأن صورته هي مبدأ المعلم.
- $z$  عدد حقيقي موجب تماما يعني  $\arg z = k2\pi$  :  $k \in \mathbb{Z}$ .
- $z$  عدد حقيقي سالب تماما يعني  $\arg z = \pi + k2\pi$  :  $k \in \mathbb{Z}$ .
- $z$  عدد تخيلي صرف يعني  $\arg z = \frac{\pi}{2} + k2\pi$  أو  $\arg z = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$  :  $k \in \mathbb{Z}$ .
- إذا كان  $\arg z = \theta + k2\pi$  فإن  $\arg \bar{z} = -\theta + k2\pi$ .
- إذا كان  $\arg z = \theta + k2\pi$  فإن  $\arg (-z) = \theta + \pi + k2\pi$  :  $k \in \mathbb{Z}$ .
- إذا كان  $M(z) \neq M'(z')$  فإن  $\arg(z' - z) = (\vec{OI}, \vec{MM'}) + k2\pi$  :  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 2. خواص :

- من أجل كل عددين مركبين  $z$  و  $z'$  و من أجل كل عدد صحيح  $n$  غير منعدم :
- $\arg z \cdot z' = \arg z + \arg z' + k2\pi$  :  $\arg z^n = n \arg z + k2\pi$ .
  - $\arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z' + k2\pi$  حيث  $z' \neq 0$  و  $k \in \mathbb{Z}$ .

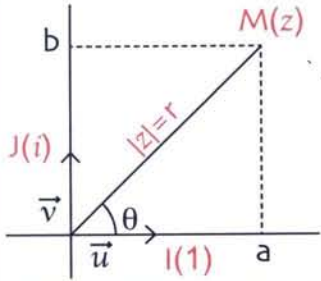
• حالة خاصة إذا كان  $|z| = 1$  فإن  $\arg \frac{1}{z} = \arg \bar{z} = -\arg z + 2k\pi$ .

## V - توظيف الأعداد المركبة في دراسة مجموعات النقط

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .
- إذا كان  $A(z_1), B(z_2)$  نقطتين من المستوي فإن  $|\vec{AB}| = |z_2 - z_1|$ .
  - $(\vec{u}; \vec{AB}) = \arg(z_2 - z_1) + k2\pi$  :  $k \in \mathbb{Z}$ .
  - إذا كان  $A(z_1), B(z_2), C(z_3), D(z_4)$  نقطا من المستوي فإن
  - $(\vec{CA}; \vec{CB}) = \arg\left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}\right) + k2\pi$  :  $k \in \mathbb{Z}$ .
  - $(\vec{AB}; \vec{CD}) = \arg\left(\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1}\right) + k2\pi$  :  $k \in \mathbb{Z}$ .
  - $r$  عدد حقيقي موجب،  $\theta$  عدد حقيقي،  $\omega(z_0)$  نقطة من المستوي.
  - مجموعة النقط  $M(z)$  من المستوي التي تحقق العلاقة  $z = z_0 + re^{i\theta}$  هي :
    - (أ) دائرة مركزها  $\omega$  و نصف قطرها  $r$  من أجل  $r$  ثابت و  $\theta$  متغير.
    - (ب) نصف مستقيم مبدؤه النقطة  $\omega$  و  $e^{i\theta}$  لاحقة شعاع توجيه له من أجل  $r$  متغير و  $\theta$  ثابت.

## VI - الشكل المثلثي لعدد مركب غير منعدم

### 1. تعريف



$z$  عدد مركب غير منعدم ؛ نضع  $|z| = r$  و  $\arg z = \theta + k2\pi$  ،  $k \in \mathbb{Z}$

الكتابة  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  تسمى الشكل المثلثي للعدد المركب  $z$  ونكتب  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

### 2. الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي والعكس

• للانتقال من الشكل  $z = a + ib$  إلى الشكل  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  ، نحسب  $r$  ،  $\cos \theta$  ،  $\sin \theta$  .

حيث  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  و  $\cos \theta = \frac{a}{r}$  و  $\sin \theta = \frac{b}{r}$

• للانتقال من الشكل  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  إلى الشكل  $z = a + ib$  نحسب  $a$  و  $b$  حيث  $a = r \cos \theta$  و  $b = r \sin \theta$

ملاحظات

•  $r(\cos \theta + i \sin \theta) = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$  يكافئ  $r = r'$  و  $\theta = \theta' + k2\pi$  حيث  $r > 0$  و  $r' > 0$  و  $k \in \mathbb{Z}$

• الكتابة  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  هي الشكل الجبري للعدد  $z = r \cos \theta + i r \sin \theta$

• إذا كان  $r < 0$  فالكتابة  $-r[\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta)]$  هي الشكل المثلثي للعدد  $z$

### 3. دستور موافر (Moivre)

من أجل كل عدد  $n$  من  $\mathbb{Z}$  ،  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

العلاقة  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$  تسمى دستور موافر.

## VII - الشكل الأسّي لعدد مركب

ترميز أولير (Euler)

نضع من أجل كل عدد حقيقي  $\theta$  ،  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

يرمز العدد  $e^{i\theta}$  إلى العدد المركب الذي طويلته 1 و  $\theta$  عمدة له.

الكتابة  $e^{i\theta}$  تسمى ترميز أولير للعدد المركب  $\cos \theta + i \sin \theta$

### 1. تعريف

$z$  عدد مركب غير منعدم طويلته  $r$  و  $\theta$  عمدة له.

الكتابة  $z = re^{i\theta}$  تسمى الشكل الأسّي للعدد  $z$

## 2. قواعد الحساب

قواعد الحساب في الشكل الأسّي هي قواعد الحساب على القوى.

$$\begin{aligned} z &= r e^{i\theta} \text{ و } z' = r' e^{i\theta'} \\ z \cdot z' &= r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r \cdot r' e^{i(\theta + \theta')} \\ \bar{z} &= \overline{r e^{i\theta}} = r e^{-i\theta} \end{aligned}$$

نضع  $z = r e^{i\theta}$  و  $z' = r' e^{i\theta'}$  .  
عمدة و طول  $z \cdot z'$  :  $r \cdot r'$  و  $\theta + \theta'$   
عمدة و طول  $\bar{z}$  :  $r$  و  $-\theta$  هي عمدة  $\bar{z}$  طول  $\bar{z}$

## 3. دستور موافر و ترميز أولير

دستور موافر الوارد في الشكل المثلثي يكتب على الشكل الأسّي كما يلي :

$$n \in \mathbb{Z} \text{ حيث } (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

نتيجة

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \text{ و } e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \text{ و } \sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

تسمى كل من هاتين العلاقتين دستور أولير.

## VIII - الجذران التربيعيان لعدد مركب غير منعدم

$z$  عدد مركب غير منعدم حيث  $z = a + ib$  و  $a \in \mathbb{R}$  و  $b \in \mathbb{R}$

$z$  عدد مركب غير منعدم حيث  $z = x + iy$  و  $x \in \mathbb{R}$  و  $y \in \mathbb{R}$

$\sqrt{z}$  جذر تربيعي للعدد  $z$  إذا و فقط إذا كان  $\sqrt{z}^2 = z$

$$(x + iy)^2 = a + ib \text{ أي أن}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases} \text{ و بالتالي}$$

بحل هذه الجملة نجد الجذرين التربيعيين  $\sqrt{z}_1$  و  $\sqrt{z}_2$  للعدد  $z$  حيث  $\sqrt{z}_2 = -\sqrt{z}_1$

$z$  عدد مركب غير منعدم حيث  $z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$  و  $r = |z|$  و  $\theta = \arg z$

$z$  عدد مركب غير منعدم حيث  $z = \rho (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha)$  و  $\rho = |z|$  و  $\alpha = \arg z$

$\sqrt{z}$  جذر تربيعي للعدد  $z$  إذا و فقط إذا كان  $\sqrt{z}^2 = z$

$$\rho^2 (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) = r (\cos \theta + i \sin \theta) \text{ أي أن}$$

$$\begin{cases} \rho^2 = r \\ 2\alpha = \theta + k2\pi \end{cases} \text{ و بالتالي حيث } k \in \mathbb{Z}$$



بحل هذه الجملة نجد الجذرين التربيعيين  $z_1$  و  $z_2$  للعدد  $z$  حيث  $z_2 = -z_1$ .

ملاحظة

إذا كان  $z = re^{i\theta}$  و  $z = pe^{i\alpha}$  فإن  $z^2 = z$  إذا وفقط إذا كان  $p^2 e^{2i\alpha} = re^{i\theta}$  أي أن  $p^2 = r$  و  $2\alpha = \theta$ .  
وبالتالي الجذران التربيعيان للعدد المركب  $z$  هما  $z_1 = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$  و  $z_2 = -z_1$ .

## IX - المعادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$

- المعادلة  $az^2 + bz + c = 0$  حيث  $a \in \mathbb{C}^*$ ،  $b \in \mathbb{C}$ ،  $c \in \mathbb{C}$  تسمى معادلة من الدرجة الثانية ذات المجهول  $z$  في  $\mathbb{C}$ .
- العدد المركب  $\Delta$  حيث  $\Delta = b^2 - 4ac$  يسمى مميز المعادلة السابقة.
- $\delta$  و  $-\delta$  الجذران التربيعيان للعدد المركب  $\Delta$ .

مبرهنة

المعادلة  $az^2 + bz + c = 0$  تقبل حلين في  $\mathbb{C}$

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a} \quad \text{هما}$$

• إذا كان  $\Delta = 0$  فإن  $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$  و إذا كان  $\Delta \neq 0$  فإن  $z_1 \neq z_2$ .

ملاحظات

- إذا كان  $b = 2b'$  فإن  $\Delta' = b'^2 - ac$  و  $z_1 = \frac{-b' + \delta'}{a}$  و  $z_2 = \frac{-b' - \delta'}{a}$  حيث  $\delta'$  جذر تربيعي للعدد  $\Delta'$ .
- $a, b, c$  أعداد حقيقية حيث  $a \neq 0$ .  
إذا كان  $\Delta \geq 0$  فإن المعادلة  $az^2 + bz + c = 0$  تقبل حلين حقيقيين.  
إذا كان  $\Delta < 0$  فإن  $i\sqrt{-\Delta}$  جذر تربيعي للعدد  $\Delta$   
و المعادلة  $az^2 + bz + c = 0$  تقبل حلين مترافقين في  $\mathbb{C}$   
هما  $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$  و  $z_2 = \bar{z}_1$ .

## X - التحويلات النقطية و الأعداد المركبة

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.
- دراسة التحويلات النقطية التي ترفق بكل نقطة  $M(z)$  النقطة  $M'(z')$  حيث  $z' = az + b$ ؛  $a \in \mathbb{R}^*$  و  $b \in \mathbb{C}$  أو  $a \in \mathbb{C}^*$  و  $|a| = 1$  و  $b \in \mathbb{C}$ .

| التحويل النقطي<br>و عناصره المميّزة                                                       | التعريف الهندسي                                                                                                                                                                                                  | الكتابة المركبة                                                                                                                                 | التمثيل |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| $t$ هو الإنسحاب<br>الذي شعاعه $\vec{v}$                                                   | $t : M \mapsto M'$<br>حيث $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$                                                                                                                                                       | $t : M(z) \mapsto M'(z')$<br>حيث $z' = z + b$<br>و $\vec{v}$ الشعاع الذي لاحقه $b$                                                              |         |
| $h$ هو التحاكي الذي<br>مركزه $\omega$ و نسبته $\lambda$<br>حيث $\lambda \in \mathbb{R}^*$ | $h : M \mapsto M'$<br>حيث $\overrightarrow{\omega M'} = \lambda \overrightarrow{\omega M}$                                                                                                                       | $h : M(z) \mapsto M'(z')$<br>حيث $z' - z_0 = \lambda (z - z_0)$<br>و $z_0$ هي لاحقة $\omega$                                                    |         |
| $r$ هو الدوران الذي<br>مركزه $\omega$ و زاويته $\theta$<br>حيث $\theta \in \mathbb{R}$    | $r : M \mapsto M'$<br>حيث $\begin{cases} \overrightarrow{\omega M'} = \overrightarrow{\omega M} \\ (\overrightarrow{\omega M'}, \overrightarrow{\omega M}) = \theta + k2\pi \end{cases}$<br>و $k \in \mathbb{Z}$ | $r : M(z) \mapsto M'(z')$<br>حيث $z' - z_0 = e^{i\theta} (z - z_0)$<br>و $z_0$ هي لاحقة $\omega$<br>$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ |         |

و بالعكس، كل تحويل نقطي الذي يرفق بكل نقطة  $M(z)$  النقطة  $M'(z')$ .

حيث  $z' = az + b$  مع  $a \in \mathbb{C}^*$  و  $b \in \mathbb{C}$  هو :

1. إنسحاب شعاعه  $\vec{v}(b)$  إذا كان  $a = 1$ .

2. تحاك نسبة  $a$  إذا كان  $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ .

(مركزه النقطة  $\omega$  التي لاحقتها  $\frac{b}{1-a}$ ).

3. دوران زاويته  $\theta$  حيث  $\theta = \arg a + k2\pi$  :  $k \in \mathbb{Z}$  إذا كان  $a \neq 1$  و  $|a| = 1$ .

(مركزه النقطة  $\omega$  التي لاحقتها  $\frac{b}{1-a}$ ).

### ملاحظتان

1. كل من التحاكي الذي مركزه  $\omega$  و نسبة 1 - و الدوران الذي مركزه  $\omega$  و زاويته  $\pi$  هو تناظر مركزه

$\omega$  و كتابته المركبة هي :  $z' = -z + 2z_0$  حيث  $z_0$  لاحقة  $\omega$ .

2. كل نقطة تنطبق على صورتها بتحويل نقطي تسمى نقطة صامدة لهذا التحويل.

| $t$ هو إنسحاب شعاعه $\vec{v}$                                                   | $h$ هو تحاك مركزه $\omega$ و نسبته $k$                                   | $r$ هو دوران مركزه $\omega$ و زاويته $\theta$                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| • إذا كان $\vec{v} \neq \vec{0}$ فإنه لا توجد<br>نقط صامدة.                     | • إذا كان $k \neq 1$ فإنه توجد نقطة<br>صامدة واحدة وهي المركز $\omega$ . | • إذا كان $\theta \neq k2\pi$ فإنه توجد<br>نقطة صامدة واحدة وهي المركز $\omega$ . |
| • إذا كان $\vec{v} = \vec{0}$ فإن كل<br>نقطة من المستوي صامدة بهذا<br>الانسحاب. | • إذا كان $k = 1$ فإن كل<br>نقطة من المستوي صامدة بهذا<br>التحاكي.       | • إذا كان $\theta = k2\pi$ فإن كل<br>نقطة من المستوي صامدة بهذا<br>الدوران.       |



1 إنجاز العمليات الحسابية على الاعداد المركبة

تمرين 1

أنجز العمليات الحسابية التالية، ثم اكتب العدد الناتج على الشكل الجبري.

$$\frac{i-4}{2+5i} + \frac{2+3i}{1-i}, \frac{2-i}{3+i} \times \frac{3-i}{1-i}, \frac{i-5}{3+5i}, (1+i)^3, (3+4i)(3-4i), (2+3i)^2$$

حل

قواعد الحساب في  $\mathbb{C}$  هي قواعد الحساب المعروفة في  $\mathbb{R}$  مع  $i^2 = -1$ .

•  $(2+3i)^2$  من الشكل  $(a+ib)^2$  : لدينا  $(a+ib)^2 = (2)^2 + 2(2) \times (3i) + (3i)^2$

$$= 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i + 9(-1)$$

و بالتالي  $(2+3i)^2 = -5 + 12i$

•  $(3+4i)(3-4i)$  من الشكل  $(a+ib)(a-ib)$  : لدينا  $(a+ib)(a-ib) = (3)^2 - (4i)^2$

$$= 9 - 16(-1)$$

و بالتالي  $(3+4i)(3-4i) = 25$

•  $(1+i)^3$  من الشكل  $(a+ib)^3$  : لدينا  $(a+ib)^3 = 1^3 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i$

إذن  $(1+i)^3 = -2 + 2i$

• **ملاحظة :** يمكن كتابة  $(1+i)^3$  على الشكل  $(1+i)(1+i)^2$  ثم إجراء الحساب.

• حساب  $\frac{i-5}{3+5i}$  : لدينا  $\frac{i-5}{3+5i} = \left(\frac{i-5}{3+5i}\right) \left(\frac{3-5i}{3-5i}\right)$

$$= \frac{3i - i(-5i) - 5 \times 3 + 5(-5i)}{3^2 - (5i)^2} = \frac{-10 + 28i}{34} = -\frac{5}{17} + \frac{14i}{17}$$

و بالتالي  $\frac{i-5}{3+5i} = -\frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$

• حساب  $\frac{2-i}{3+i} \times \frac{3-i}{1-i}$

لدينا  $\frac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(1-i)} = \frac{6 - 2i - 3i + i^2}{3 - 3i + i - i^2} = \frac{5-5i}{4-2i}$

كتابة العدد المركب  $\frac{5-5i}{4-2i}$  على الشكل الجبري .

• لدينا  $\frac{5-5i}{4-2i} = \frac{(5-5i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \frac{20 + 10i - 20i - 10i^2}{20} = \frac{30 - 10i}{20} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

و بالتالي  $\frac{(2-i)(3-i)}{(3+i)(1-i)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$



• حساب  $\frac{i-4}{2+5i} + \frac{2+3i}{1-i}$

$$\frac{i-4}{2+5i} + \frac{2+3i}{1-i} = \frac{(i-4)(1-i) + (2+3i)(2+5i)}{(2+5i)(1-i)}$$

بعد توحيد المقامين نكتب :

$$\frac{(i-i^2-4+4i) + (4+10i+6i+15i^2)}{2-2i+5i-5i^2} = \frac{-14+21i}{7+3i}$$

و بالتالي  $\frac{i-4}{2+5i} + \frac{2+3i}{1-i} = \frac{-14+21i}{7+3i}$

كتابة العدد المركب  $\frac{-14+21i}{7+3i}$  على الشكل الجبري. لدينا  $\frac{-14+21i}{7+3i} = \frac{(-14+21i)(7-3i)}{(7+3i)(7-3i)}$

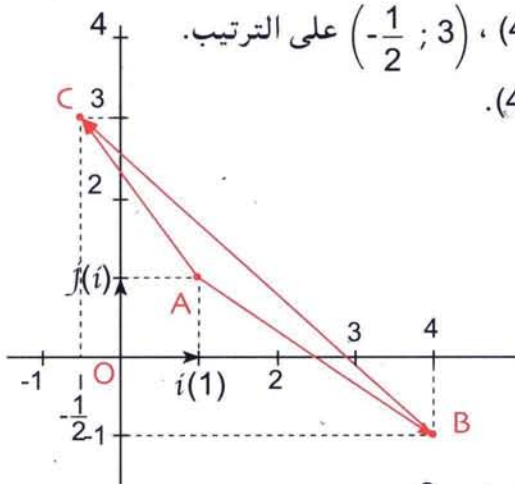
$$\frac{-14+21i}{7+3i} = \frac{-35}{58} + \frac{189}{58}i$$

بعد الحساب و الاختصار نجد  $\frac{i-4}{2+5i} + \frac{2+3i}{1-i} = \frac{-35}{58} + \frac{189}{58}i$

### تمرين 2

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . علم النقط  $A, B, C$  ذات اللواحق  $1+i, 4-i, -\frac{1}{2}+3i$  على الترتيب. احسب لواحق الاشعة  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{BC}$ .  $\vec{AB} + \vec{AC}$ .

حل



• إحداثيات النقط  $A, B, C$  هي  $(1; 1), (4; -1), (-\frac{1}{2}; 3)$  على الترتيب.

• الشعاع  $\vec{AB}$  هو صورة العدد المركب  $(4-i) - (1+i)$ .

إذن لاحقة الشعاع  $\vec{AB}$  هي  $3-2i$ .

لاحقة الشعاع  $\vec{AC}$  هي  $(-\frac{1}{2}+3i) - (1+i)$  أي  $-\frac{3}{2}+2i$ .

لاحقة الشعاع  $\vec{BC}$  هي  $(-\frac{1}{2}+3i) - (4-i)$  أي  $-\frac{9}{2}+4i$ .

لاحقة الشعاع  $\vec{AB} + \vec{AC}$  هي  $(3-2i) + (-\frac{1}{2}+2i)$  أي  $\frac{5}{2}$ .

**ملاحظة** بما أن لاحقة الشعاع  $\vec{AB} + \vec{AC}$  عدد حقيقي فإن هذا الشعاع يوازي الشعاع  $\vec{OA}$ .

### تمرين 3

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .  
عين مجموعة النقط  $M$  ذات اللواحق  $z$  في كل حالة من الحالتين التاليتين :

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0 \quad , \quad \operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$$

حل

نضع  $z = x + iy$  حيث  $x, y$  عدنان حقيقيان.

نكتب العدد  $\frac{z-1}{z-i}$  على الشكل الجبري مع  $z \neq i$

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z-i} &= \frac{x-1+iy}{x+i(y-1)} = \frac{[x-1+iy][x-i(y-1)]}{[x+i(y-1)][x-i(y-1)]} \\ &= \frac{x(x-1)+y(y-1)+i[-(x-1)(y-1)+xy]}{x^2+(y-1)^2} \end{aligned}$$

لدينا

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = \frac{x^2+y^2-x-y}{x^2+(y-1)^2} \quad : \text{ بعد الحساب و الاختصار نجد : }$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = \frac{x+y-1}{x^2+(y-1)^2}$$

• مجموعة النقط  $M$  ذات اللواحق  $z$  حيث  $\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$  هي مجموعة النقط  $M(x; y)$  حيث

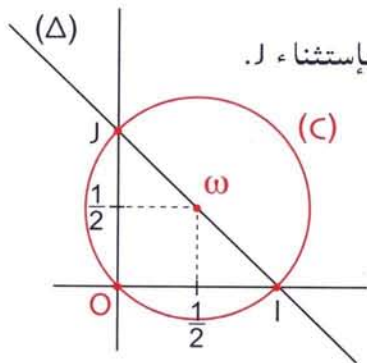
$$x^2 + y^2 - x - y = 0 \quad \text{باستثناء النقطة } J(0; 1)$$

هذه المجموعة هي دائرة (C) مركزها  $\omega\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$  و نصف قطرها  $O\omega$  باستثناء J.

• مجموعة النقط  $M$  ذات اللواحق  $z$  حيث  $\operatorname{Im}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$

هي مجموعة النقط  $M(x; y)$  حيث  $x + y - 1 = 0$  باستثناء النقطة  $J(0; 1)$ .

و هي مستقيم  $(\Delta)$  معين بالنقطتين  $I(1; 0)$  و  $J(0; 1)$  باستثناء J.



### 2 استعمال خواص مرافق عدد مركب

### تمرين 1

$z$  عدد مركب. اكتب، بدلالة  $\bar{z}$ ، مرافق كل عدد مركب فيما يلي :

$$z_5 = \frac{2z^2 + z - 1}{-3z + i} \quad , \quad z_4 = \frac{1-z}{1+i\bar{z}} \quad , \quad z_3 = (z-i)(z+3) \quad , \quad z_2 = i(3+z) \quad , \quad z_1 = 1+iz$$

حل

$$\bar{z}_1 = 1 - i\bar{z} \quad \text{إذن} \quad \bar{z}_1 = \overline{1 + iz} = \overline{1 + i\bar{z}} = 1 + i\bar{z} \quad \text{لدينا}$$

$$\bar{z}_2 = -i(3 + \bar{z}) \quad \text{إذن} \quad \bar{z}_2 = \overline{i(3 + z)} = \overline{i(3 + \bar{z})} = -i(3 + \bar{z})$$

$$\bar{z}_3 = (\bar{z} + i)(\bar{z} + 3) \quad \text{إذن} \quad \bar{z}_3 = \overline{(z - i)(z + 3)} = \overline{(z - i)(z + 3)} = (\bar{z} - i)(\bar{z} + 3)$$

$$\bar{z}_4 = \frac{1 - \bar{z}}{1 - i\bar{z}} \quad \text{إذن} \quad \bar{z}_4 = \overline{\left(\frac{1 - z}{1 + iz}\right)} = \frac{\overline{1 - z}}{\overline{1 + iz}} = \frac{1 - \bar{z}}{1 + i\bar{z}}$$

$$\bar{z}_5 = \frac{2(\bar{z}^2) + \bar{z} - 1}{-3\bar{z} - i} \quad \text{إذن} \quad \bar{z}_5 = \overline{\left(\frac{2z^2 + z - 1}{-3z + i}\right)} = \frac{\overline{2z^2 + z - 1}}{\overline{-3z + i}} = \frac{2(\bar{z}^2) + \bar{z} - 1}{-3\bar{z} + i}$$

### تمرين 1

حل في  $\mathbb{C}$  المعادلتين للمجهول  $z$  التاليتين :

$$2z + i\bar{z} = 5 - 4i \quad (2) \quad z = 2\bar{z} - 2 + 6i \quad (1)$$

حل

• حل المعادلة (1) : نضع  $z = x + iy$  فيكون  $\bar{z} = x - iy$  بعد تعويض كل من  $z$  و  $\bar{z}$  في (1) .

$$\text{تكتب المعادلة (1) : } x + iy = 2(x - iy) - 2 + 6i$$

$$\text{و تبسط على الشكل } (x - 2) + (-3y + 6)i = 0$$

$$\text{هذا يعني } x - 2 = 0 \text{ و } -3y + 6 = 0$$

$$\text{إذن } x = 2 \text{ و } y = 2$$

و بالتالي  $z = 2 + 2i$  هو حل المعادلة (1) .

• حل المعادلة (2) : نضع  $z = x + iy$  فيكون  $\bar{z} = x - iy$  نعوض  $z$  ،  $\bar{z}$  .

$$\text{في المعادلة (2) فنجد } 2(x + iy) + i(x - iy) = 5 - 4i$$

$$\text{أي أن } 2x + y + i(x + 2y) = 5 - 4i \text{ أو } 2x + 2iy + ix - i^2y = 5 - 4i$$

$$\text{إذن } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = -4 \end{cases} \text{ ونحل هذه الجملة ونجد } x = \frac{14}{3} \text{ و } y = \frac{-13}{3}$$

$$\text{و يكون حل المعادلة (2) هو } z = \frac{14}{3} - \frac{13}{3}i$$



3 التعرف على الشكل الجبري أو الشكل المثلثي أو الشكل الأسّي لعدد مركب غير منعدم

### تمرين 1

من بين الأعداد المركبة  $z$  التالية ميز بين المكتوبة منها على الشكل الجبري أو على الشكل المثلثي أو على الشكل الأسّي.

$$z = \sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12} \quad ; \quad z = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \quad ; \quad z = i \quad ; \quad z = -10$$

$$z = 2e^i \quad ; \quad z = -\sqrt{2} \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \quad ; \quad z = \frac{1}{1+i} \quad ; \quad z = \sqrt{2}(i+1)$$

$$z = (\sqrt{3} - 2)e^{i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad z = \sin \frac{2\pi}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z = \cos \frac{2\pi}{3} e^{i\frac{\pi}{3}} \quad ; \quad z = 1 + e^{i\pi}$$

$$z = \sqrt{3} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) \quad ; \quad z = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

حل

نلخص الأجوبة في الجدول التالي :

| العدد $z$                                                              | $z$ مكتوب على الشكل الجبري $a + ib$ ...                | $z$ مكتوب على الشكل المثلثي $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ | $z$ مكتوب على الشكل الأسّي $re^{i\theta}$ حيث ... | ملاحظات                  |
|------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|--------------------------|
| - 10                                                                   | $a = -10 ; b = 0$                                      |                                                              |                                                   |                          |
| $i$                                                                    | $a = 0 ; b = 1$                                        |                                                              |                                                   |                          |
| $\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}$                          | $a = \cos \frac{\pi}{12}$<br>$b = \sin \frac{\pi}{12}$ | $r = 1 ; \theta = \frac{\pi}{12}$                            |                                                   |                          |
| $\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12}$                          | $a = \sin \frac{\pi}{12}$<br>$b = \cos \frac{\pi}{12}$ |                                                              |                                                   |                          |
| $\sqrt{2}(i+1)$                                                        |                                                        |                                                              |                                                   | $z$ هو جداء عددين مركبين |
| $\frac{1}{1+i}$                                                        |                                                        |                                                              |                                                   | $z$ هو مقلوب عدد مركب    |
| $-\sqrt{2} \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ |                                                        |                                                              |                                                   | $-\sqrt{2} < 0$          |
| $2e^i$                                                                 |                                                        |                                                              | $r = 2 ; \theta = 1$                              |                          |

|                              |                                                       |                                           |  |                                                                         |
|------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------|--|-------------------------------------------------------------------------|
| $z$ هو مجموع<br>عددين مركبين |                                                       |                                           |  | $1 + e^{i\pi}$                                                          |
| $\cos \frac{2\pi}{3} < 0$    |                                                       |                                           |  | $\cos \frac{2\pi}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$                                |
|                              | $r = \sin \frac{2\pi}{3}$<br>$\theta = \frac{\pi}{3}$ |                                           |  | $\sin \frac{2\pi}{3} e^{i\frac{\pi}{3}}$                                |
| $\sqrt{3} - 2 < 0$           |                                                       |                                           |  | $(\sqrt{3} - 2)e^{i\frac{\pi}{4}}$                                      |
|                              | $r = 1 ; \theta = -\frac{\pi}{2}$                     |                                           |  | $e^{-i\frac{\pi}{2}}$                                                   |
|                              |                                                       | $r = \sqrt{3} ; \theta = \frac{7\pi}{12}$ |  | $\sqrt{3} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$ |

#### 4 حساب طويلة و عمدة عدد مركب غير منعدم و كتابته على شكل مثلثي أو شكل أسي

##### تمرين 1

احسب الطويلة و عمدة لكل عدد مركب فيما يلي ثم اكتبه على الشكل المثلثي و على الشكل الأسي.

$$z_5 = \frac{-\sqrt{2}}{1+i} \quad ; \quad z_4 = 1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad z_3 = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad z_2 = -10 \quad ; \quad z_1 = -3i$$

$$z_8 = \frac{(1-i)^5}{(1-i\sqrt{3})^4} \quad ; \quad z_7 = \left( \frac{\sqrt{3}+i}{1-i} \right)^8 \quad ; \quad z_6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$$

حل

الشكل المثلثي و الشكل الأسي للعدد  $z_1$  :  $|z_1| = |-3i| = |-3||i|$  إذن  $|z_1| = 3$

$$\arg z_1 = \arg(-3i) + 2k\pi = \arg(-3) + \arg(i) + 2k\pi = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{إذن } k \in \mathbb{Z} : \arg z_1 = 3\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

الكتابة  $z_1 = -3i$  هي الشكل المثلثي للعدد  $z_1 = -3i$  :  $3 \left[ \cos \left( 3\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( 3\frac{\pi}{2} \right) \right]$

الكتابة  $z_1 = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$  هي الشكل الأسي للعدد  $z_1$ .



• الشكل المثلثي و الشكل الأسّي للعدد  $z_2$   $|z_2| = |-10| = 10$  (لأن  $z_2$  عدد حقيقي).

$$k \in \mathbb{Z} : \arg z_2 = -\pi + k2\pi \quad \text{إذن} \quad \arg z_2 = \arg(-10) + k2\pi$$

الكتابة  $10(\cos(-\pi) + i \sin(-\pi))$  هي الشكل المثلثي للعدد  $z_2 = -10$ .

الكتابة  $z_2 = 10 e^{-i\pi}$  هي الشكل الأسّي للعدد  $z_2 = -10$ .

• الشكل المثلثي و الشكل الأسّي للعدد  $z_3$ :

$$k \in \mathbb{Z} : \arg z_3 = 0 + k2\pi \quad \text{و} \quad |z_3| = \left|\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2}$$

$$z_3 = \frac{\pi}{2} e^{i0} : z_3 = \frac{\pi}{2} (\cos 0 + i \sin 0)$$

• الشكل المثلثي و الشكل الأسّي للعدد  $z_4$   $|z_4| = \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$$z_4 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

$$k \in \mathbb{Z} : \arg z_4 = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{إذن}$$

$$z_4 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} : z_4 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{إذن} : \arg z_4 = \frac{\pi}{3} + k2\pi : |z_4| = 2$$

• الشكل المثلثي و الشكل الأسّي للعدد  $z_5$ :

$$|z_5| = 1 \quad \text{أي} \quad |z_5| = \left|\frac{-\sqrt{2}}{1+i}\right| = \frac{|-\sqrt{2}|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$k \in \mathbb{Z} : \arg z_5 = \arg(-\sqrt{2}) - \arg(1+i) + k2\pi$$

$$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{و لدينا} : \arg(-\sqrt{2}) = \pi + k2\pi$$

$$\arg z_5 = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \quad \text{إذن} \quad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad \text{أي}$$

$$z_5 = e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \text{و} \quad z_5 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \quad \text{إذن} \quad \arg z_5 = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \quad \text{و} \quad |z_5| = 1$$

• الشكل المثلثي و الشكل الأسّي للعدد  $z_6$ :

$$|z_6| = \sqrt{2} \quad \text{أي} \quad |z_6| = \left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right| = \frac{|1+i\sqrt{3}|}{|1+i|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$k \in \mathbb{Z} : \arg z_6 = \arg(1+i\sqrt{3}) - \arg(1+i) + k2\pi$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$z_6 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}} : z_6 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right) \quad \text{إذن} \quad \arg z_6 = \frac{\pi}{12} + k2\pi \quad \text{و} \quad |z_6| = \sqrt{2}$$



• الشكل المثلثي و الشكل الأسّي للعدد  $z_7$  :

$$|z_7| = 16 \quad \text{أي} \quad |z_7| = \left| \frac{\sqrt{3}+i}{1+i} \right|^8 = \frac{|\sqrt{3}+i|^8}{|1+i|^8} = \frac{2^8}{(\sqrt{2})^8} = 16$$

$$k \in \mathbb{Z} : \arg z_7 = 8 \arg \left( \frac{\sqrt{3}+i}{1+i} \right) + k2\pi \quad \text{إذن} \quad z_7 = \left( \frac{\sqrt{3}+i}{1+i} \right)^8 \quad \text{لدينا}$$

$$= 8 [\arg(\sqrt{3}+i) - \arg(1+i)] + k2\pi$$

لنحسب عمدة للعدد  $\sqrt{3}+i$ .

$$\sqrt{3}+i = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{و} \quad |\sqrt{3}+i| = 2 \quad \text{لدينا}$$

$$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad \text{و نعلم مما سبق أن} \quad \arg(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

$$\arg z_7 = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad \text{و بعد الاختصار نجد} \quad \arg z_7 = 8 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \right) + k2\pi$$

$$z_7 = 16e^{i\frac{2\pi}{3}} : \quad z_7 = 16 \left[ \cos \left( -\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{2\pi}{3} \right) \right] \quad \text{فإن} \quad \arg z_7 = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad \text{و} \quad |z_7| = 16 \quad \text{بما أن}$$

• الشكل المثلثي و الشكل الأسّي للعدد  $z_8$

$$|z_8| = \left| \frac{(1-i)^5}{(1-i\sqrt{3})^4} \right| = \frac{|(1-i)^5|}{|(1-i\sqrt{3})^4|} = \frac{|1-i|^5}{|1-i\sqrt{3}|^4}$$

$$|1-i\sqrt{3}|^4 = 2^4 \quad \text{إذن} \quad |1-i\sqrt{3}| = 2 \quad \text{و} \quad |1-i|^5 = (\sqrt{2})^5 \quad \text{إذن} \quad |1-i| = \sqrt{2} \quad \text{لدينا}$$

$$|z_8| = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{بعد الاختصار نجد}$$

$$\arg z_8 = \arg(1-i)^5 - \arg(1-i\sqrt{3})^4 + k2\pi \quad \text{لدينا}$$

$$= 5 \arg(1-i) - 4 \arg(1-i\sqrt{3}) + k2\pi$$

نحسب عمدة للعدد  $1-i$  و لتكن  $\theta$  و عمدة للعدد  $1-i\sqrt{3}$  و لتكن  $\theta'$ .

$$\text{لدينا} \quad |1-i| = \sqrt{2} \quad , \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{إذن} \quad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{و بالمثل} \quad |1-i\sqrt{3}| = 2 \quad , \quad \cos \theta' = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \sin \theta' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{إذن} \quad \theta' = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{أي أن} \quad \arg(1-i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{و} \quad \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$$

$$\arg z_8 = 5 \left( -\frac{\pi}{4} \right) - 4 \left( -\frac{\pi}{3} \right) + k2\pi \quad \text{نحسب} \quad \arg z_8$$

$$k \in \mathbb{Z} : \arg z_8 = \frac{\pi}{12} + k2\pi \quad \text{بعد الحساب و الاختصار نجد}$$

$$z_8 = \frac{\sqrt{2}}{4} e^{i\frac{\pi}{12}} \quad \text{و} \quad z_8 = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \quad \text{إذن} \quad \arg z_8 = \frac{\pi}{12} + k2\pi \quad |z_8| = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{لدينا}$$

5 الانتقال من الشكل الجبري إلى الشكل المثلثي

تمرين 1

• أكتب على الشكل الجبري ثم على شكل مثلثي كل عدد مركب مما يلي

$$z_3 = 5 \left( \cos \frac{2\pi}{5} - i \sin \frac{2\pi}{5} \right) ; \quad z_2 = \frac{4}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}} ; \quad z_1 = \frac{-1 + 3i\sqrt{3}}{10 - 2i\sqrt{3}}$$

$$z_5 = \frac{1}{1 + i \tan \frac{\pi}{12}} ; \quad z_4 = 1 + i \tan \frac{17\pi}{12}$$

حل

• كتابة العدد  $z_1$  على الشكل الجبري :

$$z_1 = \frac{-1 - 3i\sqrt{3}}{10 - 2i\sqrt{3}} = \frac{(-1 + 3i\sqrt{3})(10 + 2i\sqrt{3})}{(10 - 2i\sqrt{3})(10 + 2i\sqrt{3})} = \frac{-28 + 28i\sqrt{3}}{10^2 - (2\sqrt{3})^2} \quad \text{لدينا}$$

$$\text{و بعد الاختصار نجد } z_1 = -\frac{1}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4} \quad \text{وهو الشكل الجبري للعدد } z_1.$$

• كتابة العدد  $z_1$  على الشكل المثلثي :

نضع  $r = |z_1|$  و  $\theta$  عمدة للعدد  $z_1$ .

$$\text{لدينا } r = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} \quad \text{إذن } r = \frac{1}{2} \quad \text{أي } |z_1| = \frac{1}{2}.$$

$$\text{كذلك } \begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{4} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases} \quad \text{أي } \begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{إذن } \theta = \pi - \frac{\pi}{3} \quad \text{أي } \arg z_1 = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

$$\text{وبالتالي } z_1 = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

• كتابة العدد  $z_2$  على الشكل الجبري :

$$z_2 = \frac{4}{\sqrt{6} - i\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{6} + i\sqrt{2})}{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(\sqrt{6} + i\sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{6} + 4i\sqrt{2}}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} \quad \text{لدينا}$$

$$\text{و بعد الاختصار نجد } z_2 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}$$

• كتابة العدد  $z_2$  على الشكل المثلثي :

لكتابة  $z_2$  على الشكل المثلثي  $r(\cos \theta + i \sin \theta)$  نحسب  $r$  ،  $\cos \theta$  ،  $\sin \theta$ .

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2} \quad \text{لدينا}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{و}$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{إذن} \quad \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{و} \quad r = \sqrt{2} \quad \text{لدينا}$$

• كتابة العدد  $z_3$  على الشكل الجبري

$$a + ib \quad \text{الكتابة} \quad z_3 = 5 \cos \frac{2\pi}{5} - 5 \sin \frac{2\pi}{5}$$

إذن هي الشكل الجبري للعدد  $z_3$ .

**ملاحظة :** يمكن الاعتماد على الشكل الجبري للعدد  $z_3$  لتعيين الشكل المثلثي له.

ذلك بفرض أن  $z_3$  يكتب على الشكل  $z_3 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  حيث

$$|z_3| = r \quad \arg z_3 = \theta + 2k\pi \quad \text{ثم تعيين كل من } r \text{ و } \theta.$$

$$r = \sqrt{\left(5 \cos \frac{2\pi}{5}\right)^2 + \left(-5 \sin \frac{2\pi}{5}\right)^2} = 5 \quad \text{لدينا}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{5} \left( 5 \cos \frac{2\pi}{5} \right) = \cos \frac{2\pi}{5} = \cos \left( -\frac{2\pi}{5} \right)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{5} \left( -5 \sin \frac{2\pi}{5} \right) = -\sin \frac{2\pi}{5} = \sin \left( -\frac{2\pi}{5} \right)$$

$$\theta = -\frac{2\pi}{5} + 2k\pi \quad \text{إذن}$$

$$z_3 = \left[ \cos \left( -\frac{2\pi}{5} \right) + i \sin \left( -\frac{2\pi}{5} \right) \right] \quad \text{و بالتالي}$$

• كتابة العدد  $z_4$  على الشكل الجبري :

$$a + ib \quad \text{العدد} \quad 1 + i \tan \frac{17\pi}{12} \quad \text{مكتوب على الشكل} \quad \text{فهو إذن الشكل الجبري للعدد } z_4$$

جزؤه الحقيقي هو 1 و جزؤه التخيلي هو  $\tan \frac{17\pi}{12}$ .



• كتابة الشكل المثلثي للعدد  $z_4$  :

$$z_4 = 1 + i \tan \frac{17\pi}{12} = 1 + \frac{i \sin \frac{17\pi}{12}}{\cos \frac{17\pi}{12}} \quad \text{لدينا}$$

$$z_4 = \frac{1}{\cos \frac{17\pi}{12}} \left( \cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$$

بما أن العدد  $\frac{1}{\cos \frac{17\pi}{12}} < 0$  فالكاتب السابقة ليست الشكل المثلثي للعدد  $z_4$ .

$$z_4 = - \frac{1}{\cos \frac{17\pi}{12}} \left( - \cos \frac{17\pi}{12} - i \sin \frac{17\pi}{12} \right) \quad \text{كتابة } z_4 \text{ على الشكل}$$

$$\text{نلاحظ أن } \frac{17\pi}{12} = \pi + \frac{\pi}{12} \quad \text{يكون } \cos \frac{17\pi}{12} = - \cos \frac{\pi}{12} \quad \text{و } \sin \frac{17\pi}{12} = - \sin \frac{\pi}{12}$$

$$\text{ينتج أن } z_4 = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{12}} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \quad \text{وهي الشكل المثلثي للعدد } z_4.$$

• كتابة العدد  $z_5$  على الشكل الجبري :

$$z_5 = \frac{1}{1 + i \tan \frac{\pi}{12}} = \frac{1 - i \tan \frac{\pi}{12}}{(1 + i \tan \frac{\pi}{12})(1 - i \tan \frac{\pi}{12})} = \frac{1 - i \tan \frac{\pi}{12}}{1 + \tan^2 \frac{\pi}{12}} \quad \text{لدينا}$$

$$z_5 = \cos^2 \frac{\pi}{12} \left( 1 - i \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} \right) \quad \text{نعلم أن } \tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} \quad \text{و بعد التعويض نجد}$$

$$z_5 = \cos^2 \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \quad \text{ينتج أن وهو الشكل الجبري للعدد } z_5$$

$$\text{جزؤه الحقيقي } \cos^2 \frac{\pi}{12} \quad \text{و جزؤه التخيلي } - \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$$

• كتابة العدد  $z_5$  على الشكل المثلثي :

$$z_5 = \cos \frac{\pi}{12} \left( \cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right) \quad \text{أو } z_5 = \cos^2 \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \quad \text{لدينا}$$

$$\text{بما أن } \cos \frac{\pi}{12} > 0 \quad \text{فإن } z_5 = \cos \frac{\pi}{12} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{12} \right) \right) \quad \text{وهو الشكل المثلثي للعدد } z_5.$$

**ملاحظة :** يمكن اعتبار الشكل الجبري للعدد  $z_5$  وحساب  $r$  ،  $\cos \theta$  ،  $\sin \theta$ .

$$\text{ثم كتابة } z_5 \text{ على الشكل } r (\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{حيث } |z| = r \quad \arg z_5 = \theta + k2\pi$$

$$r = \cos \frac{\pi}{12} \quad \text{اذن} \quad r^2 = \cos^4 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} \cos^2 \frac{\pi}{12} = \cos^2 \frac{\pi}{12} \left( \cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{12}$$

$$\sin \theta = \frac{-\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} = -\sin \frac{\pi}{12} \quad \text{و} \quad \cos \theta = \frac{\cos^2 \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} = \cos \frac{\pi}{12}$$

$$.k \in \mathbb{Z} : \quad \theta = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \quad \text{و بالتالي} \quad \begin{cases} \cos \theta = \cos \left( -\frac{\pi}{12} \right) \\ \sin \theta = \sin \left( -\frac{\pi}{12} \right) \end{cases} \quad \text{اذن}$$

$$.z_5 = \cos^2 \frac{\pi}{12} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{12} \right) + \sin \left( \frac{\pi}{12} \right) \right) \quad \text{ينتج أن}$$

## تمرين 2

• أكتب على الشكل المثلثي الأعداد المركبة التالية :

$$z_4 = (1+i)e^{i\frac{3\pi}{4}} : \quad z_3 = 3ie^{i\pi} : \quad z_2 = (\sqrt{3}-2)e^{i\frac{\pi}{4}} : \quad z_1 = -5e^{i\frac{\pi}{4}}$$

## حل

• كتابة العدد  $z_1$  على شكل مثلثي :

$$-5 < 0, \quad -5e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{ليس الشكل الأسّي للعدد } z_1.$$

$$z_1 = 5e^{i\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 5e^{(i\pi + i\frac{\pi}{4})} \quad \text{اذن} \quad -5 = 5e^{i\pi} \quad \text{و} \quad e^{i\pi} = -1 \quad \text{نعلم أن}$$

$$.z_1 = 5e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad \text{أي} \quad z_1 = 5 \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \quad \text{اذن}$$

$$.z_1 = -5 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{ملاحظة : يمكن أن نكتب}$$

$$= 5 \left( -\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 5 \left[ \cos \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

$$.z_1 = 5 \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \quad \text{و بالتالي}$$

• كتابة العدد  $z_2$  على شكل مثلثي :

$$\sqrt{3}-2 < 0, \quad (\sqrt{3}-2)e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{ليس الشكل الأسّي للعدد } z_2.$$

$$z_2 = -(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{4}} = (2-\sqrt{3})e^{i\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = (2-\sqrt{3})e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad \text{اذن} \quad e^{i\pi} = -1 \quad \text{نعلم أن}$$

$$.z_2 = (2-\sqrt{3})e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad \text{أي}$$

$$.z_2 \quad \text{و بالتالي يكون} \quad z_2 = (2-\sqrt{3}) \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \quad \text{هو الشكل المثلثي للعدد}$$

• ملاحظة : يمكن كتابة الشكل المثلثي للعدد  $z_2$  دون المرور على الشكل الأسّي له.

• كتابة العدد  $z_3$  على شكل مثلثي :

$$3ie^{i\pi} = 3e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\pi} \quad \text{إذن} \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

و بالتالي  $z_3 = 3e^{i\frac{3\pi}{2}}$  إذن  $z_3 = 3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$  و هو الشكل المثلثي للعدد  $z_3$ .

**ملاحظة :** العدد  $z_3$  يمكن أن يكتب  $z_3 = 3i(-1)$

أو  $z_3 = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$  و هو الشكل المثلثي للعدد  $z_3$ .

• كتابة العدد  $z_4$  على شكل مثلثي :

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{إذن} \quad \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad |1 + i| = \sqrt{2}$$

$$z_4 = (1 + i) e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}\right)}$$

$$أي \quad z_4 = \sqrt{2}e^{i\pi} \quad \text{و هو الشكل الأسّي للعدد } z_4$$

$$\text{إذن} \quad z_4 = \sqrt{2}(\cos \pi + i \sin \pi) \quad \text{و هو الشكل المثلثي للعدد } z_4$$

## 6 توظيف الأعداد المركبة في دراسة مجموعات نقط

### تمرين 1

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .  $A, B, C, D$  نقط لواحقها على

$$\text{الترتيب} \quad z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 4 + 5i, \quad z_3 = 5 - 2i, \quad z_4 = \frac{13}{3} + \frac{8}{3}i$$

1. اثبت أن النقط  $D, C, B$  على استقامة واحدة.

2. اثبت أن المستقيمين  $(AB)$  و  $(AC)$  متعامدان.

حل

1. النقط  $D, C, B$  على استقامة واحدة يعني أن  $(\vec{DB}; \vec{DC}) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

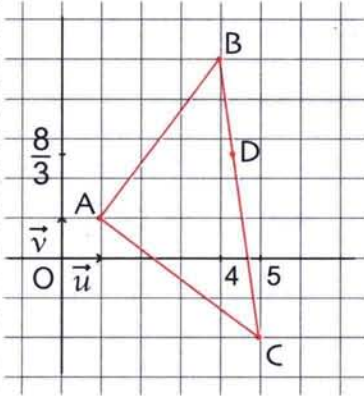
$$\text{لدينا} \quad (\vec{DB}; \vec{DC}) = \arg \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4}$$

$$z_3 - z_4 = \frac{2}{3} - \frac{14}{3}i \quad \text{و} \quad z_2 - z_4 = -\frac{1}{3} + \frac{7}{3}i \quad \text{إذن} \quad \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4} = -2$$

$$\text{و بالتالي} \quad \arg \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_4} = \arg(-2) = \pi + k2\pi \quad \text{أو} \quad (\vec{DB}; \vec{DC}) = \pi + k2\pi$$

و بالتالي النقط  $D, C, B$  على استقامة واحدة.





**ملاحظة :** يمكن أن نبرهن هذه النتيجة بحساب لاحقتي الشعاعين

$$\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB} \quad z_3 - z_4 = -2(z_2 - z_4) \quad \text{ثم ملاحظة أن}$$

$$\overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB} \quad \text{أي } \overrightarrow{DC} \text{ و } \overrightarrow{DB} \text{ فالشعاعان}$$

مرتبطان خطيا. أي أن النقط B، C، D على استقامة واحدة.

2. المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان يعني

$$k \in \mathbb{Z}, (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{أن}$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{4 - 3i}{3 + 4i} = -i \quad \text{ينتج أن} \quad z_2 - z_1 = 4 + 3i \quad ; \quad z_3 - z_1 = 4 - 3i$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \text{إذن} \quad \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

وبالتالي المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان.

**ملاحظة :** يمكن أن نبرهن هذه النتيجة بحساب  $AC^2 = |z_3 - z_1|^2 = 25$  ;  $BC^2 = |z_2 - z_1|^2 = 25$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \text{و التحقق أن} \quad BC^2 = |z_3 - z_2|^2 = 50$$

## تمرين 2

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . عين مجموعة النقط M ذات اللواحق ثم مثلها بيانيا، في كل حالة مما يلي :

$$|z - 2 + i| = \sqrt{5} \quad \bullet 2$$

$$|z - 3| = |z - 1 - i| \quad \bullet 1$$

$$\arg(z - 2 + i) = \frac{\pi}{4} \quad \bullet 4$$

$$\arg(z - 3i) = \frac{\pi}{2} \quad \bullet 3$$

$$r \geq 0, \quad z = 1 + i + re^{i\frac{\pi}{3}} \quad \bullet 6$$

$$\arg \frac{z + 1}{z - 2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \bullet 5$$

$$\theta \in \mathbb{R}, \quad z = 1 + i + 2e^{i\theta} \quad \bullet 7$$

**حل**

1. تعيين مجموعة النقط  $M(z)$  حيث  $|z - 3| = |z - 1 - i|$

نعين المجموعة بوضع  $z = x + iy$  وحساب  $|z - 3|^2$ ,  $|z - 1 - i|^2$

بدلالة  $x, y$  فيكون  $|z - 3| = |z - 1 - i|$  يعني  $4x - 2y - 7 = 0$

إذن مجموعة النقط  $M(z)$  هي محور القطعة [AB].

**ملاحظة :** إذا كانت A النقطة ذات اللاحقة 3

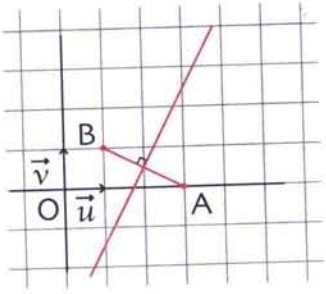
فإن  $z - 3$  هي لاحقة الشعاع  $\overrightarrow{AM}$

و كانت B النقطة ذات اللاحقة  $1 + i$  فإن  $z - (1 + i)$

هي لاحقة الشعاع  $\overrightarrow{BM}$

لدينا  $|z - 3| = |z - (1 + i)|$  يعني  $AM = BM$

وبالتالي مجموعة النقط المطلوبة هي محور القطعة [AB].



2 • تعيين مجموعة النقط  $M(z)$  حيث  $|z - 2 + i| = \sqrt{5}$

نعين المجموعة بوضع  $z = x + iy$

فيكون  $|x - 2 + i(y + 1)| = \sqrt{5}$

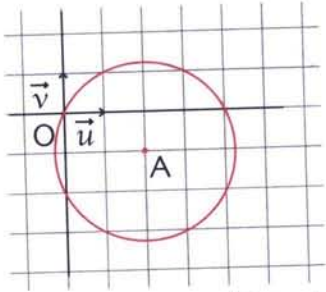
أي  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$

وهذه الأخيرة معادلة للدائرة التي مركزها A ذات اللاحقة  $2 - i$  و نصف قطرها  $\sqrt{5}$ .

**ملاحظة :** إذا كانت A النقطة ذات اللاحقة  $2 - i$  فإن  $z - (2 - i)$  هي لاحقة الشعاع  $\overrightarrow{AM}$

$|z - 2 + i| = \sqrt{5}$  يعني  $AM = \sqrt{5}$

مجموعة النقط المطلوبة هي الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها  $\sqrt{5}$ .



3 • تعيين مجموعة النقط  $M(z)$  حيث  $\arg(z - 3i) = \frac{\pi}{2}$

لدينا  $\arg(z - 3i) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

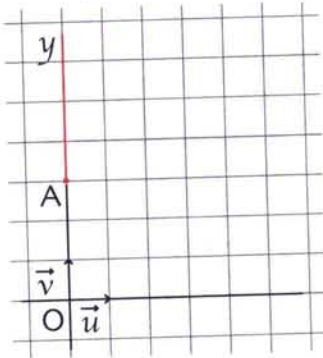
يعني  $z - 3i$  تخيلي صرف أو أيضا

$\mathcal{R}(z - 3i) = 0$  و  $\text{Im}(z - 3i) \geq 0$  (\*)

إذا فرضنا أن  $z = x + iy$  فإن  $z - 3i = x + i(y - 3)$

و تكتب الجملة (\*) كما يلي  $x = 0$  و  $y \geq 3$

و تكون المجموعة المطلوبة هي  $[Ay]$  (كما في الشكل).



**ملاحظة :** إذا كانت A النقطة ذات اللاحقة  $3i$  فإن  $\arg(z - 3i) = \arg(\vec{i}; \overrightarrow{AM})$

إذن النقطة M تحقق  $\arg(\vec{i}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$  ،  $k \in \mathbb{Z}$

مجموعة النقط M هي نقط الجزء  $[Ay]$  من محور الترتيب الذي لا يشمل المبدأ.

4 • تعيين مجموعة النقط  $M(z)$  حيث  $\arg(z - 2 + i) = \frac{\pi}{4}$  (\*)

نعلم أن  $\frac{\pi}{4}$  هي عمدة للعدد  $1 + i$  إذن  $\arg(z - 2 + i) = \arg(1 + i) + k2\pi$  ،  $k \in \mathbb{Z}$

إذن  $\arg(z - 2 + i) - \arg(1 + i) = k2\pi$  ،  $k \in \mathbb{Z}$

أو أيضا  $\arg\left(\frac{z-2+i}{1+i}\right) = k2\pi$  و بالتالي مجموعة النقط  $M(z)$  التي تحقق العلاقة (\*)

هي مجموعة النقط  $M(z)$  التي يكون من أجلها العدد  $\frac{z-2+i}{1+i}$  حقيقيا موجبا

أي  $\operatorname{Re}\left(\frac{z-2+i}{1+i}\right) \geq 0$  و  $\operatorname{Im}\left(\frac{z-2+i}{1+i}\right) = 0$

نضع  $z = x + iy$  فيكون  $\frac{z-2+i}{1+i} = \frac{1}{2} [x + y - 1 + i(-x + y + 3)]$

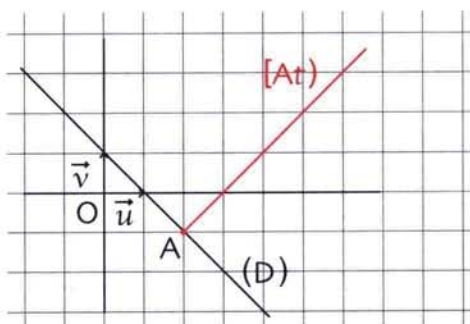
و تكون مجموعة النقط  $M(x; y)$  المطلوبة هي التي تحقق

$$\begin{cases} -x + y + 3 = 0 \\ x + y - 1 \geq 0 \end{cases}$$

وهي نصف المستقيم  $[At)$  الذي مبدؤه

النقطة  $A(2 - i)$  و المحتوي في نصف المستوي

المحدود بالمستقيم  $(D)$  و الذي لا يشمل  $O$ .



**ملاحظة :** إذا فرضنا أن  $A$  النقطة ذات اللاحقة  $2 - i$  فإن  $(\vec{i}; \vec{AM}) = \arg(z - (2 - i))$

و بالتالي  $(\vec{i}; \vec{AM}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

إذن مجموعة النقط  $M(z)$  هي نصف المستقيم  $(\Delta)$  الذي متدؤه النقطة  $A$  (كما في الشكل).

5. تعيين مجموعة النقط  $M(z)$  حيث  $\arg \frac{z+1}{z-2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

من أجل  $z \neq 2i$  نكتب

$\arg \frac{z+1}{z-2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$  يعني  $\frac{z+1}{z-2i}$  تخيلي صرف.

نضع  $z = x + iy$  و نكتب العدد  $\frac{z+1}{z-2i}$  على الشكل الجبري.

$$\frac{z+1}{z-2i} = \frac{(x+1)x + y(y-2) + i(2x - y + 2)}{x^2 + (y-2)^2} + \frac{i(2x - y + 2)}{x^2 + (y-2)^2}$$

لدينا

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-2i}\right) = 0 \text{ يعني } \frac{z+1}{z-2i} \text{ تخيلي صرف}$$

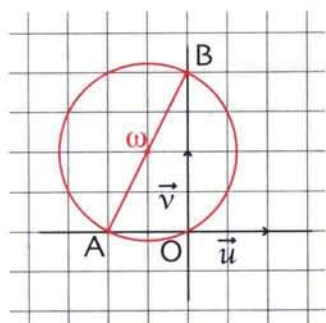
إذن مجموعة النقط  $M$  المطلوبة هي التي تحقق إحداثياتها المعادلة  $x^2 + y^2 + x - 2y = 0$

وهي الدائرة التي مركزها  $\omega(-\frac{1}{2}; 2)$  و نصف قطرها  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  بإستثناء  $B(0; 2)$ .

**ملاحظة :** نفرض النقطتين  $A(-1)$  و  $B(2i)$ .

$$(\vec{BM}; \vec{AM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ يعني } \arg \frac{z - (-1)}{z - 2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

إذن مجموعة النقط  $M$  المطلوبة هي الدائرة التي قطرها  $[AB]$  بإستثناء  $B$ .





6. تعيين مجموعة النقط  $M(z)$  حيث  $z = 1 + i + re^{i\frac{\pi}{3}}$

نضع  $z = x + iy$  و  $x + iy = 1 + i + r\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$  ينتج أن  $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}r \\ y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}r \end{cases} ; r \geq 0$  أو أيضا  $\begin{cases} x - 1 = \frac{y - 1}{\sqrt{3}} \\ x \geq 1 \text{ و } y \geq 1 \end{cases}$

إذن المجموعة المطلوبة هي نصف المستقيم  $(\omega t)$

الذي مبدؤه  $\omega(1 + i)$  و  $\vec{S}(e^{i\frac{\pi}{3}})$  شعاع توجيه له.

7. تعيين مجموعة النقط  $M(z)$  حيث  $z = 1 + i + 2e^{i\theta}$  ،  $\theta \in \mathbb{R}$

نضع  $z = x + iy$  إذن  $x + iy = 1 + i + 2(\cos \theta + i \sin \theta)$

نستنتج أن  $\begin{cases} x = 1 + 2 \cos \theta \\ y = 1 + 2 \sin \theta \end{cases}$  أي  $\begin{cases} x - 1 = 2 \cos \theta \\ y - 1 = 2 \sin \theta \end{cases}$

و نجد  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta$

أي  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

المجموعة المطلوبة هي الدائرة التي مركزها  $\omega(1 + i)$  و نصف قطرها 2.

7. توظيف دستور موافر و ترميز أولير لحل مسائل

### تمرين 1

عين مجموعة قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون العدد  $z = (\sqrt{3} + i)^n$  حقيقيا. • تخيليا صرفا.

### حل

العدد  $\sqrt{3} + i$  مكتوب على الشكل الجبري.

لنكتب هذا العدد على الشكل المثلثي أي  $2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$

فيكون  $z = 2^n \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^n$

حسب دستور موافر  $\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^n = \cos n \frac{\pi}{6} + i \sin n \frac{\pi}{6}$  أي  $z = \left(\cos n \frac{\pi}{6} + i \sin n \frac{\pi}{6}\right)$

•  $z$  عدد حقيقي يعني  $\text{Im}(z) = 0$  و  $\text{Im}(z) = 2^n i \sin n \frac{\pi}{6}$

إذن  $\sin n \frac{\pi}{6} = 0$  أي  $\sin n \frac{\pi}{6} = \sin(0)$

وبالتالي  $n \frac{\pi}{6} = k\pi$  أو  $n = 6k$  ؛  $k \in \mathbb{N}$   
 نستنتج أن  $(\sqrt{3} + i)^n$  حقيقي إذا وفقط إذا كان  $n = 6k$  ؛  $k \in \mathbb{N}$ .

•  $z$  عدد تخيلي صرف يعني  $\operatorname{Re}(z) = 0$  و  $\operatorname{Re}(z) = 2^n \cos n \frac{\pi}{6}$   
 إذن  $\cos n \frac{\pi}{6} = 0$  أو  $\cos n \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{2}$

وبالتالي  $n \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$  أو  $n = 3 + 6k$  ؛  $k \in \mathbb{N}$   
 ينتج أن  $(\sqrt{3} + i)^n$  حقيقي إذا وفقط إذا كان  $n = 3 + 6k$  ؛  $k \in \mathbb{N}$ .

## تمرين 2

أكتب على الشكل الخطي الأعداد التالية :

$$\cos^2 x \quad ; \quad \sin^2 x \quad ; \quad \cos^3 x \quad ; \quad \sin^3 x$$

حل

لكتابة الأعداد  $\cos^2 x$  ؛  $\sin^2 x$  ؛  $\cos^3 x$  ؛  $\sin^3 x$  على الشكل الخطي،

نستعمل قانوني أولير  $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$  ؛  $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

• لدينا  $\cos^2 x = \left[ \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \right]^2 = \frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} + 2) = \frac{1}{4}(2 \cos 2x + 2)$

وبالتالي  $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$

• لدينا  $\sin^2 x = \left[ \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \right]^2 = \frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} - 2) = -\frac{1}{4}(2 \cos 2x - 2)$

وبالتالي  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

• لدينا  $\cos^3 x = \left[ \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \right]^3 = \frac{1}{8}(e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} + e^{-i3x})$

$$= \frac{1}{8}[e^{i3x} + e^{-i3x} + 3(e^{ix} + e^{-ix})] = \frac{1}{8}(2 \cos 3x + 6 \cos x)$$

وبعد التبسيط و الاختصار نجد  $\cos^3 x = \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{3}{4} \cos x$

• لدينا  $\sin^3 x = \left[ \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \right]^3 = -\frac{1}{8i}(e^{i3x} - 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} - e^{-i3x})$

$$= -\frac{1}{8i}[e^{i3x} - e^{-i3x} - 3(e^{ix} - e^{-ix})] = -\frac{1}{8i}(2i \sin 3x + 6i \sin x)$$

وبعد التبسيط و الاختصار نجد  $\sin^3 x = -\frac{1}{4} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x$

### تمرين 3

عبر عن  $\sin 3x$  و  $\cos 3x$  بدلالة  $\sin x$  و  $\cos x$ .

حل

نحسب  $(\cos x + i \sin x)^3$  بطريقتين :

باستعمال دستور موافر نجد  $(\cos x + i \sin x)^3 = \sin 3x + i \cos 3x$ .

و باستخدام دستور ثنائي الحد نجد

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x$$

$$\cos 3x + i \sin 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x + i (3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x)$$

اذن

$$\begin{cases} \cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x \\ \sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x \end{cases}$$

ينتج أن

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

نعلم أن

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \quad \text{و} \quad \sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

و بالتالي

### 8 تعيين الجذرين التربيعيين لعدد مركب

#### تمرين 1

احسب الجذرين التربيعيين للعدد  $z = 1 + i\sqrt{3}$

حل

العدد  $z$  يكتب على الشكل المثلثي  $z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

نفرض أن أحد الجذرين التربيعيين للعدد  $z$  يكتب  $r(\cos \theta + i \sin \theta)$  إذن

$$r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{أو} \quad [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos \frac{\pi}{3} \\ \sin 2\theta = \sin \frac{\pi}{3} \\ r^2 = 2 \end{cases} \quad \text{أي أن}$$

$$2\theta = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{أو} \quad 2\theta = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{و} \quad r = \sqrt{2}$$

$$k \in \mathbb{Z} : \quad 2\theta = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{أو} \quad 2\theta = \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

$$\text{و ينتج} \quad r = \sqrt{2} \quad \text{و} \quad 2\theta = \frac{\pi}{3} + k2\pi : k \in \mathbb{Z} \quad \text{إذن} \quad r = \sqrt{2} \quad \text{و} \quad \theta = \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z}$$



$$z_k = \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) \right] \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z} \text{ جذر للعدد } z$$

و نحصل على الجذرين التربيعيين  $z_1, z_0$  للعدد المركب  $z$  من أجل  $k=0$  و  $k=1$  وهما :

$$z_1 = \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) \right] \quad ; \quad z_0 = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$(z_1 = -z_0) \quad , \quad z_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad z_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{أي}$$

**ملاحظة :** لدينا  $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$  و يكون الجذران التربيعيان للعدد  $z$  هما  $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}$  ،  $z_1 = -z_0$ .

## تمرين 2

عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب  $z$  حيث  $z = -8 - 6i$

**حل**

$$\text{نضع } z = x + iy$$

$z$  جذر تربيعي للعدد  $z$  يعني  $z^2 = z$

$$\text{أي أن } (x + iy)^2 = -8 - 6i \text{ و بالتالي} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ 2xy = -6 \end{cases}$$

$$\text{هذه الجملة تبسط على الشكل التالي} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ x^2 + y^2 = 10 \\ xy < 0 \end{cases}$$

بحل هذه الجملة بطريقة الجمع، نجد  $x^2 = 1$  و  $y^2 = 9$  و  $xy < 0$

ينتج أن  $(x = 1 \text{ و } y = -3)$  أو  $(x = -1 \text{ و } y = 3)$ .

و بالتالي الجذران التربيعيان للعدد المركب  $-8 - 6i$  هما  $1 - 3i$  و  $-1 + 3i$ .

## 9 معادلة من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$

## تمرين 1

حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية :  $z^2 - 4(1-i)z + 2(4-i) = 0$

**حل**

$$\text{لدينا } \Delta' = [-2(i-1)]^2 - 2(4-i) \quad \text{بعد الاختصار نجد } \Delta' = -8 - 6i$$

بما أن  $\Delta'$  عدد مركب غير منعدم فإن المعادلة تقبل حلين مختلفين في  $\mathbb{C}$ .

## طرائق

إذا كان الجذران التربيعيان للعدد المركب  $\Delta'$  هما  $\delta'$  و  $-\delta'$  حيث  $\delta' = 1-3i$  (إرجع إلى التمرين السابق) فإن حل المعادلة هما  $z_1 = \frac{-b' + \delta'}{a} = 2(1-i) + (1-3i) = 3-5i$  و  $z_2 = \frac{-b' - \delta'}{a} = 2(1-i) - (1-3i) = 1+i$

### تمرين 2

حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول  $z$  حيث  $\frac{1}{2}z^2 - z + \frac{5}{2} = 0$

حل

ميز المعادلة هو  $\Delta = (-1)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = -4$  أي  $\Delta = 4i^2 = (2i)^2$  عدد حقيقي و  $\Delta < 0$  إذن المعادلة تقبل حلين مترافقين  $z_1$  و  $z_2$  حيث  $z_1 = 1+2i$  و  $z_2 = \bar{z}_1$ .

### 10 معادلات يؤول حلها إلى معادلات من الدرجة الثانية في $\mathbb{C}$

### تمرين 1

حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول  $z$  حيث  $z^4 - 6z^2 + 25 = 0$

حل

نضع  $t = z^2$  فيكون  $t^2 - 6t + 25 = 0$  .... (1)  
حساب  $\Delta'$ : لدينا  $\Delta' = 9 - 25 = -16 = -16i^2$  فيكون جذرا  $\Delta$  هما  $4i$  و  $-4i$ .  
للمعادلة (1) حلان هما  $t = 3 + 4i$  أو  $t = 3 - 4i$ .  
وبالتالي  $z^2 = 3 + 4i$  أو  $z^2 = 3 - 4i$ .  
تعيين الجذرين التربيعيين للعدد  $3+4i$ .

العدد المركب  $\alpha + i\beta$  حيث  $\alpha, \beta$  عددان حقيقيان، جذر تربيعي للعدد  $3+4i$ .

يعني  $(\alpha + i\beta)^2 = 3 + 4i$  أو  $\alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = 3 + 4i$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 3 & \text{إذن } |\alpha + i\beta|^2 = |3 + 4i| \\ 2\alpha\beta = 4 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \end{cases}$$

ينتج أن  $2\alpha^2 = 8$  و  $2\beta^2 = 2$  و  $\alpha\beta > 0$

جذرا  $3+4i$  هما  $z_1 = 2+i$  و  $z'_1 = -z_1$

بنفس الطريقة نحسب الجذرين التربيعيين للعدد  $3-4i$  و هما  $z_2 = 2+i$  و  $z'_2 = -z_2$ .

ملاحظة: بما أن  $\overline{3+4i} = 3-4i$  إذن الجذران التربيعيين للعدد  $3-4i$  هما مرافقا الجذرين

التربيعيين للعدد  $3+4i$ . (و هما  $2+i$  و  $-2-i$ ).

## تمرين 2

حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$ .

$$z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12 = 0 \dots\dots\dots (*)$$

حل

بما أن  $a$  حل للمعادلة (\*) فإن  $a^3 - (3+4i)a^2 - 4(1-3i)a + 12 = 0$

$$a^3 - 3a^2 - 4a + 12 + i(-4a^2 + 12a) = 0$$

$$\begin{cases} a^3 - 3a^2 - 4a + 12 = 0 \\ -4a^2 + 12a = 0 \end{cases} \quad \text{إذن}$$

هذه الجملة تقبل حلا واحدا في  $\mathbb{R}$  هو 3.

إذن  $a = 3$  هو الحل الحقيقي للمعادلة (\*).

وبالتالي يمكن تحليل العبارة  $z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12$  على الشكل

$$(z-3)(z^2 + pz + q)$$

بنشر  $(z-3)(z^2 + pz + q)$  ومقارنته بالعبارة  $z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12$

$$\begin{cases} p - 3 = -3 - 4i \\ q - 3p = -4 + 12i \\ -3q = 12 \end{cases} \quad \text{ينتج أن}$$

ونجد  $p = -4i$  و  $q = -4$

إذن المعادلة (\*) تكتب على الشكل  $(z-3)(z^2 - 4iz - 4) = 0$

لحل المعادلة  $z^2 - 4iz - 4 = 0$  نحسب الجذرين التربيعيين للعدد  $\Delta' = -8 = 8i^2$ .

ونجد  $2i\sqrt{2}$ ،  $-2i\sqrt{2}$  ثم نحسب الحلين  $z_1$  و  $z_2$ .

$$z_1 = 2i + 2i\sqrt{2}$$

$$= 2(1 + \sqrt{2})i$$

$$z_2 = 2i - 2i\sqrt{2}$$

$$= 2(1 - \sqrt{2})i$$

ونستخلص أن للمعادلة  $z^3 - (3+4i)z^2 - 4(1-3i)z + 12 = 0$  ثلاثة حلول في  $\mathbb{C}$  هي :

$$z_2 = 2(1 - \sqrt{2})i \quad ; \quad z_1 = 2(1 + \sqrt{2})i \quad ; \quad z_0 = 3$$



11 تعيين الكتابة المركبة لتحويل نقطي

تمرين 1

- المستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس. عبر بالأعداد المركبة عن التحويلات النقطية التالية :
- الانسحاب الذي شعاعه  $\vec{v}(2+i)$ . • الانسحاب الذي شعاعه  $\vec{AB}$  حيث  $A(3i)$  ،  $B(2-i)$ .
  - الدوران الذي مركزه  $\omega(1-2i)$  ، و زاويته  $\frac{\pi}{4}$ .
  - الدوران الذي مركزه  $\omega(1+i)$  ، و زاويته  $\frac{\pi}{2}$ .
  - التناظر الذي مركزه  $\omega(2i)$ .
  - التحاكي الذي مركزه  $\omega(2+i)$  ، و نسبته 3.

حل

• الانسحاب  $t_{\vec{v}}$  حيث  $\vec{v}(2+i)$  يعبر عنه بالعلاقة  $z' = z + 2 + i$

• الانسحاب  $t_{\vec{AB}}$  حيث  $A(3i)$  ،  $B(2-i)$  يعبر عنه بالعلاقة  $z' = z + z_B - z_A$

$$z' = z + 2 - 4i$$

• الدوران  $\pi_{(\omega; \frac{\pi}{4})}$  حيث  $\omega(1-2i)$  يعبر عنه بالعلاقة  $z' - (1-2i) = e^{i\frac{\pi}{4}}(z - (1-2i))$

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z + 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\right)i$$

• التناظر  $S_{\omega}$  حيث  $\omega(2i)$  هو الدوران  $\pi_{(\omega; \pi)}$  (أو التحاكي  $h_{(\omega; -1)}$ ).

$$\text{إذن } z' - 2i = e^{i\pi}(z - 2i) \text{ أي } z' = -z + 4i$$

• الدوران  $\pi_{(\omega; \frac{\pi}{2})}$  حيث  $\omega(1+i)$  يعبر عنه بالعلاقة  $z' - (1+i) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - (1+i))$  أو  $z' = iz + 2$

• التحاكي  $h_{(\omega; 3)}$  حيث  $\omega(2+i)$  يعبر عنه بالعلاقة  $z' - (2+i) = 3(z - (2+i))$  أو  $z' = 3z - 4 - 2i$

12 التعرف على تحويل نقطي إنطلاقاً من كتابته المركبة

تمرين 2

ميز كل تحويل نقطي للمستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة  $M(z)$  النقطة  $M'(z')$  حيث :

$$z' = -3z - 2 + 4i \quad \bullet 3$$

$$z' = z + 2 + 4i \quad \bullet 1$$

$$z' = -z + 2 \quad \bullet 4$$

$$z' = -iz - 2i \quad \bullet 2$$

حل

• 1 لكتابة المركبة للتحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة من  $M(z)$  النقطة  $M'(z')$  حيث

$$z' = z + 2 + 4i \text{ من الشكل } z' = z + b \text{ حيث } b \in \mathbb{C}$$

إذن هذا التحويل النقطي هو إنسحاب شعاعه  $\vec{v}(2+4i)$ .

2. • الكتابة المركبة للتحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة من  $M(z)$  النقطة  $M'(z')$  حيث

$$z' = -iz - 2i \quad \text{من الشكل} \quad z' = az + b \quad \text{حيث} \quad a \in \mathbb{C}^* \quad \text{و} \quad |a| = 1.$$

إذن هذا التحويل هو دوران زاويته  $\theta$  حيث  $\theta = \frac{3\pi}{2}$  لأن  $\arg(-i) = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$ .

مركز هذا الدوران هي النقطة  $\omega$  لاحتتها  $\frac{b}{1-a}$  أي  $-1-i$ .

و بالتالي التحويل النقطي  $M(z) \mapsto M'(z')$  حيث  $z' = -iz - 2i$ .

هو الدوران الذي مركزه  $\omega(-1-i)$  و زاويته  $\frac{3\pi}{2}$ .

3. • الكتابة المركبة للتحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة  $M(z)$  النقطة  $M'(z')$  حيث

$$z' = -3z - 2 + 4i \quad \text{من الشكل} \quad z' = kz + b \quad \text{حيث} \quad k \in \mathbb{R}^* \quad \text{و} \quad b \in \mathbb{C}.$$

إذن هذا التحويل النقطي تحاك نسبته  $k$  حيث  $k = -3$ .

مركز هذا التحاكي هي النقطة  $\omega$  التي لاحتتها  $\frac{b}{1-a}$  أي  $-\frac{1}{2} - i$ .

و بالتالي التحويل النقطي  $M(z) \mapsto M'(z')$  حيث  $z' = -3z - 2 + 4i$ .

هو التحاكي الذي مركزه  $\omega(-\frac{1}{2} - i)$  و نسبته  $-3$ .

4. • الكتابة المركبة للتحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة من  $M(z)$  النقطة  $M'(z')$  حيث

$$z' = -z + 2 \quad \text{من الشكل} \quad z' = -z + b \quad \text{حيث} \quad b \in \mathbb{C} \quad \text{هو التناظر الذي مركزه} \quad \omega(z_0)$$

$$\text{حيث} \quad z_0 = -z_0 + 2 \quad \text{أي} \quad z_0 = 1.$$

و بالتالي التحويل النقطي  $M(z) \mapsto M'(z')$  حيث  $z' = -z + 2$ .

هو التناظر الذي مركزه النقطة  $\omega$  ذات اللاحقة 1.

**ملاحظة :** التحويل النقطي  $M(z) \mapsto M'(z')$  حيث  $z' = -z + 2$

هو أيضا تحاك نسبته  $-1$  و مركزه النقطة  $\omega$  ذات اللاحقة 1.

كما يعتبر هذا التحويل دورانا مركزه  $\omega$  ذات اللاحقة 1 و زاويته  $\pi$ .

## تمارين و حلول نموذجية

### مسألة 1

- المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- $z$  عدد مركب يختلف عن  $-i$  و  $Z$  عدد مركب حيث  $Z = \frac{z+2i}{1-iz}$ .
- عين مجموعة النقط  $M(z)$  من المستوى ثم مثلها بيانيا في كل حالة مما يلي
- $z$  عدد حقيقي.
  - $z = -\frac{\pi}{2}$  عمدة للعدد  $Z$ .
  - $Z = z$ .
  - النقط  $A(i)$ ،  $M(z)$ ،  $N(Z)$  على استقامة واحدة.
  - $N(Z)$  تنتمي إلى الدائرة التي مركزها  $A(i)$  و نصف قطرها  $\frac{1}{2}$ .

حل

- تعيين مجموعة النقط  $M(z)$  التي من أجلها يكون  $Z$  حقيقيا.
- نكتب  $Z$  على الشكل الجبري، نضع  $z = x + iy$  :
- $$Z = \frac{z+2i}{1-iz} = \frac{x+iy+2i}{1-y-i x}$$
- $$= \frac{[x+iy+2i][1+y+ix]}{(1+y-ix)(1+y+ix)} = \frac{x(1+y) - x(y+2) + i[(y+1)(y+2) + x^2]}{(1+y)^2 + x^2}$$
- بعد الاختصار نجد  $Re(Z) = \frac{-x}{(1+y)^2 + x^2}$  و  $Im(Z) = \frac{x^2 + y^2 + 3y + 2}{(1+y)^2 + x^2}$
- $Z$  عدد حقيقي يعني  $Im(Z) = 0$  أي أن  $x^2 + y^2 + 3y + 2 = 0$  حيث  $x \neq 0$  و  $y \neq -1$
- أو  $x^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$  حيث  $x \neq 0$  و  $y \neq -1$ .
- اذن مجموعة النقط  $M(z)$  هي الدائرة التي مركزها  $\omega$  ذات اللاحقة  $-\frac{3}{2}i$  و نصف قطرها  $\frac{1}{2}$  باستثناء النقطة  $C$  ذات اللاحقة  $-i$  (الشكل).
- ملاحظة :** يمكن الحل بالطريقة التالية :  $Z$  عدد حقيقي يعني  $Z = \bar{Z}$ .
- أي  $\frac{z+2i}{1-iz} = \frac{\bar{z}-2i}{1+i\bar{z}}$  ;  $(z \neq -i)$
- أو  $(z+2i)(1+i\bar{z}) = (1-iz)(\bar{z}-2i)$
- بعد إجراء الحساب و الاختصار نجد  $3(z - \bar{z}) + 2iz\bar{z} + 4i = 0$
- بوضع  $z = x + iy = 0$  نجد  $x^2 + y^2 + 3y + 2 = 0$
- حيث  $x \neq 0$  و  $y \neq -1$  و هي المجموعة المذكورة آنفا.



2 • تعيين مجموعة النقط  $M(z)$  التي من أجلها يكون  $-\frac{\pi}{2}$  عمدة للعدد  $Z$ .

يعني  $Z$  عدد تخيلي صرف و جزؤه التخيلي سالب  $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi ; k \in \mathbb{Z}$

أو  $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi ; k \in \mathbb{Z}$  يعني  $\operatorname{Re}(Z) = 0$  و  $\operatorname{Im}(Z) < 0$

لدينا مما سبق  $\operatorname{Re}(Z) = \frac{-x}{(1+y)^2 + x^2} ; \operatorname{Im}(Z) = \frac{x^2 + y^2 + 3y + 2}{(1+y)^2 + x^2}$

إذن  $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi ; k \in \mathbb{Z}$  يعني  $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 + 3y + 2 < 0 \end{cases}$  حيث  $(x; y) \neq (0; -1)$

يعني  $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 + 3y + 2 < 0 \end{cases}$  أو  $x = 0$  و  $-1 < y < -2$

اذن المجموعة المطلوبة هي القطعة المستقيمة  $[BC]$  باستثناء طرفيها  $B(-2i)$  و  $C(-i)$ .

**ملاحظة** يمكن استعمال اعتبارات هندسية لتعيين المجموعة المطلوبة.

نكتب  $Z$  على الشكل  $Z = i \frac{z - (-2i)}{z + i}$

نعتبر النقط  $M(z) ; B(-2i) ; C(-i)$

فيكون  $\arg Z = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{CM} ; \overrightarrow{BM}) + k2\pi ; (k \in \mathbb{Z})$

لدينا  $\arg z = -\frac{\pi}{2} + k2\pi ; (k \in \mathbb{Z})$

إذن  $\frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{CM} ; \overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi ; (k \in \mathbb{Z})$

وبالتالي  $(\overrightarrow{CM} ; \overrightarrow{BM}) = \pi + k2\pi ; (k \in \mathbb{Z})$

ونحصل على المجموعة المذكورة سابقا وهي القطعة المستقيمة

$[BC]$  باستثناء طرفيها  $B(-2i)$  و  $C(-i)$ .

3 • تعيين مجموعة النقط  $M(z)$  التي من أجلها يكون  $Z = z$

$Z = z$  يعني  $\frac{z + 2i}{1 - iz} = z ; (z \neq -i)$  أي  $(1 - iz)z = z + 2i$

وبعد الاختصار نحصل على المعادلة  $z^2 + 2 = 0$  أو  $z^2 = -2$

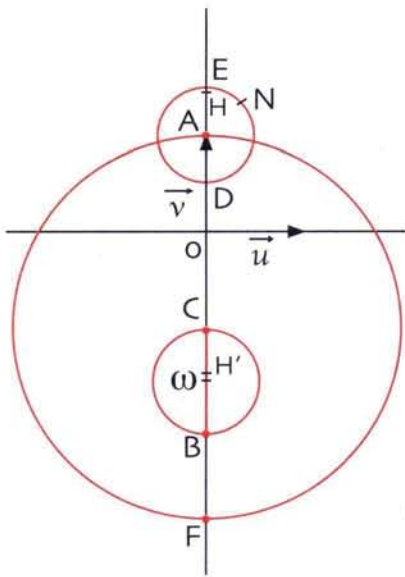
هذه المعادلة تقبل حلين هما  $z = i\sqrt{2}$  أو  $z = -i\sqrt{2}$

اذن المجموعة المطلوبة متكونة من النقطتين  $H(i\sqrt{2}) ; H'(-i\sqrt{2})$

4 • تعيين مجموعة النقط  $M(z)$  التي من أجلها يكون  $A(i) ; M(z) ; N(Z)$  على استقامة واحدة

النقط  $A ; M ; N$  على استقامة واحدة يعني  $\widehat{NAM} = k\pi$

$\widehat{NAM} = k\pi ; k \in \mathbb{Z}$  يعني  $(\overrightarrow{AN} ; \overrightarrow{AM}) = k2\pi$  أو  $(\overrightarrow{AN} ; \overrightarrow{AM}) = \pi + k2\pi ; (k \in \mathbb{Z})$



## تمارين و حلول نموذجية

$$(k \in \mathbb{Z}) : \arg \frac{z-i}{z+i} = \pi + k2\pi \quad \text{أو} \quad \arg \frac{z-i}{z+i} = k2\pi$$

$$\text{أي أن } \frac{z-i}{z+i} \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad z \neq i \quad \text{و} \quad z \neq -i$$

$$\text{أو أيضا } \operatorname{Im}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = 0$$

لنكتب عبارة  $\frac{z-i}{z+i}$  بشكل بسيط بعد تعويض  $z$ .

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{z-i}{z+2i-1} = \frac{(z-i)(1-iz)}{z+2i-iz(1-iz)} = \frac{(z-i)(1-iz)}{z+2i-iz+iz^2} = \frac{(z-i)(1-iz)}{z+2i-iz-1}$$

$$\text{إذن } \operatorname{Im}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = 0 \quad \text{يعني } \operatorname{Im}(-z^2-1) = 0 \quad \text{أو أيضا } \operatorname{Im}(z^2+1) = 0$$

$$\text{بوضع } z = x + iy \quad \text{يكون } z^2 + 1 = x^2 - y^2 + 1 + 2ixy$$

$$\text{إذن } \operatorname{Im}\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = 0 \quad \text{يعني } xy = 0 \quad \text{مع } (x; y) \neq (0; 1) \quad \text{و} \quad (x; y) \neq (0; -1)$$

**خلاصة:** مجموعة النقط  $M$  من المستوي التي من أجلها يكون  $N, M, A$  على استقامة واحدة هي مجموعة نقط محور الفواصل و نقط محور الترتيب باستثناء النقطتين  $C, A$ .

5. تعيين مجموعة النقط  $M(z)$  التي من أجلها تنتمي  $N(z)$  إلى الدائرة  $\left(A; \frac{1}{2}\right)$ .

ليكن  $[DE]$  قطرا للدائرة التي مركزها  $A(i)$  و نصف قطرها  $\frac{1}{2}$  حيث  $D\left(\frac{i}{2}\right), E\left(\frac{2i}{3}\right)$ .

$$\text{من أجل كل نقطة } N \text{ من هذه الدائرة } \widehat{DNE} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{هذا يعني } (\overrightarrow{DN}; \overrightarrow{EN}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \text{أو} \quad (\overrightarrow{DN}; \overrightarrow{EN}) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \text{حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ولدينا أيضا : } (\overrightarrow{DN}; \overrightarrow{EN}) = \arg \frac{z - \frac{3}{2}i}{z - \frac{1}{2}i} + 2k\pi \quad \text{مع } z \neq \frac{1}{2}i \quad \text{و} \quad z \neq \frac{3}{2}i$$

$$\frac{z - \frac{3}{2}i}{z - \frac{1}{2}i} = \frac{\frac{z+2i}{z-iz} - \frac{3}{2}i}{\frac{z+2i}{z-iz} - \frac{1}{2}i} = \frac{-z+i}{z+3i} = -\frac{z-i}{z-(-3i)} \quad \text{بداالة } z$$

$$\arg \frac{z - \frac{3}{2}i}{z - \frac{1}{2}i} = \arg \left( \frac{z-i}{z-(-3i)} \right) = \arg(-1) + \arg \frac{z-i}{z-(-3i)} = \pi + \arg \frac{z-i}{z-(-3i)} + k2\pi$$

و باعتبار النقط  $F(-3i), A(i), M(z)$  يكون  $(\overrightarrow{DN}; \overrightarrow{EN}) = \pi + (\overrightarrow{FM}; \overrightarrow{AM}) + k2\pi$

$$\text{إذن } \pi + (\overrightarrow{FM}; \overrightarrow{AM}) + k2\pi = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \text{أو} \quad \pi + (\overrightarrow{FM}; \overrightarrow{AM}) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{أي } (\overrightarrow{FM}; \overrightarrow{AM}) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \text{أو} \quad (\overrightarrow{FM}; \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

إذن مجموعة النقط  $M$  التي تكون من أجلها  $N$  تنتمي إلى الدائرة  $\mathbb{E}(A; \frac{1}{2})$  هي الدائرة التي قطرها  $[FA]$  باستثناء النقطتين  $A, F$ . (الشكل).

**ملاحظة:** يمكن اعتبار العدد  $\frac{-z+i}{z+3i}$  أي  $\left(\frac{z-\frac{3}{2}i}{z-\frac{1}{2}i}\right)$  تخيليا صرفا، و تعيين مجموعة النقط التي تحقق  $\operatorname{Re}\left(\frac{-z+i}{z+3i}\right)=0$ ، وهي المجموعة المطلوبة.

## مسألة 2

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .  $M, L, K$  نقط لواحقها على الترتيب

$$z_M = -i\sqrt{3}, \quad z_L = 1 - i, \quad z_K = 1 + i$$

1. عين  $N$  صورة النقطة  $L$  بالتحاكي  $h$  الذي مركزه  $M$  ونسبته 2.

2. الدوران  $r$  الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  يحول  $M$  إلى  $A$  و يحول  $N$  إلى  $C$  عين اللاحقتين  $z_C, z_A$  للنقطتين  $C, A$ .

3. الانسحاب الذي شعاعه  $\vec{v}$  ذو اللاحقة  $2i$  يحول  $M$  إلى  $D$  و يحول  $N$  إلى  $B$ . عين اللاحقتين  $z_B, z_D$  للنقطتين  $B, D$  على الترتيب.

4. اثبت أن النقطة  $K$  هي مركز تناظر الرباعي  $ABCD$ .

5. احسب  $\frac{z_B - z_K}{z_A - z_K}$ ، استنتج طبيعة الشكل الرباعي  $ABCD$ .

**حل**

1. صورة النقطة  $L$  (و هي  $N$ ) بالتحاكي  $h$  الذي مركزه  $M$  ونسبته 2 تحسب كالتالي :

$$z_N = 2z_L - z_M \text{ أو } z_N - z_M = 2(z_L - z_M)$$

بعد تعويض  $z_M, z_L$  والتبسيط نجد  $z_N = 2 + i(\sqrt{3} - 2)$ .

2. صورة  $M$  (و هي  $A$ ) بالدوران  $r$  الذي مركزه  $O$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$

$$z_A = e^{i\frac{\pi}{2}} z_M = i z_M$$

بعد تعويض  $z_M$  نجد  $z_A = i(-i\sqrt{3})$  إذن  $z_A = \sqrt{3}$ .

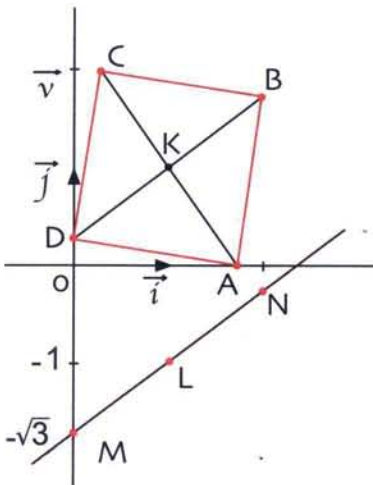
وبنفس الطريقة نحسب  $z_C$  ونجد  $z_C = 2 - \sqrt{3} + 2i$ .

3. صورة  $M$  (و هي  $D$ ) بالانسحاب  $t$  الذي شعاعه  $\vec{v}(2i)$

$$z_D = (2 - \sqrt{3})i \text{ أي } z_D = z_M + 2i$$

وبنفس الطريقة نعين صورة  $N$  (و هي  $B$ ) بالانسحاب  $t$

$$\text{ونجد } z_B = z_N + 2i \text{ أي } z_B = 2 + i\sqrt{3}$$





## تمارين و حلول نموذجية

4. البرهان على أن النقطة K مركز تناظر الرباعي ABCD.

من أجل ذلك نبرهن أن A و C متناظرتان بالنسبة إلى K وكذلك B و D.

A و C متناظرتان بالنسبة إلى K يعني K منتصف القطعة المستقيمة [AC].

لاحقة منتصف [AC] هي  $\frac{1}{2}(z_A + z_C)$  حيث  $1 + i = \frac{1}{2}[\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3} + 2i)]$  إذن لاحقة منتصف [AC] هي لاحقة K أي K هي منتصف [AC].

لاحقة منتصف [BD] هي  $\frac{1}{2}(z_B + z_D)$  حيث

$$\frac{1}{2}(z_B + z_D) = \frac{1}{2}[2 + i\sqrt{3} + (2 - \sqrt{3})i] = 1 + i$$

إذن لاحقة منتصف [BD] هي لاحقة K أي K هي منتصف [BD] أيضا، هذا يعني أن قطري

الرباعي ABCD لهما نفس المنتصف K، وبالتالي K مركز تناظر ABCD.

5. حساب  $\frac{z_B - z_K}{z_A - z_K}$  لدينا 
$$\frac{z_B - z_K}{z_A - z_K} = \frac{(2 + i\sqrt{3}) - (1 + i)}{\sqrt{3} - (1 + i)} = \frac{1 + i(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} - 1) - i}$$

$$= \frac{[1 + i(\sqrt{3} - 1)][\sqrt{3} - 1 + i]}{(\sqrt{3} - 1 - i)(\sqrt{3} - 1 + i)}$$

وبعد التبسيط والاختصار نجد  $\frac{z_B - z_K}{z_A - z_K} = i$  أو  $z_B - z_K = i(z_A - z_K)$

والعبارة الأخيرة هي عبارة الدوران الذي مركزه K وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  والذي يحول النقطة A إلى النقطة B

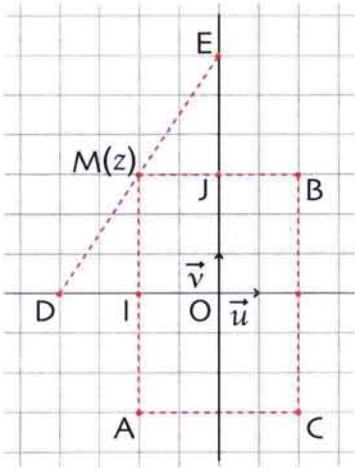
إذن  $KA = KB$  و  $(\overrightarrow{KA} ; \overrightarrow{KB}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$ .

بما أن قطري الرباعي ABCD متقايسان ومتعامدان فإن الرباعي ABCD مربع.

## تمارين و مسائل

$$z - \bar{z} : z + \bar{z} : -\bar{z} : \bar{z} : -z$$

$$\frac{1}{2}(z - \bar{z}) : \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$



### كتابة عدد مركب على الشكل الجبري

9 اكتب كل عدد مركب مما يلي على الشكل

$$z_2 = (1 + i)(2 - 3i) : z_1 = i + (2 + i)$$

$$z_4 = (3 + i)^2 : z_3 = (1 + i)(1 - i)$$

$$z_6 = (2 + 3i)^2 - (i - 1)^2 : z_5 = (2 - 5i)^2$$

10 نفس السؤال السابق.

$$z_1 = \frac{2 - 5i}{3 + i}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} - 2i}$$

$$z_3 = \frac{4 + 3i}{2 - i} + \frac{1 + i}{2 + i}$$

11 عدد حقيقي  $x$  و عدد مركب  $z$  حيث

$$z = x + 2 - i(ix + 3) - 2i + 5ix$$

اكتب بدلالة  $x$  الجزء الحقيقي  $Re(z)$  و الجزء

التخيلي  $Im(z)$  للعدد  $z$ .

استنتج قيم  $x$  التي يكون من أجلها

$z$  حقيقيا .  $z$  تخيليا صرفا .

### الحساب بالأعداد المركبة

1 أعداد مركبة حيث

$$z_3 = -2 + 3i : z_1 = -1 + 4i : z_2 = 2 + i$$

$$3z_1 - 2z_2 + \frac{1}{2}z_3 : z_1 + z_2 + z_3$$

$$(z_1 \cdot z_2)^2 : z_1^2 : \frac{1}{z_3} : \frac{z_1}{z_2} : z_1 \cdot z_2$$

$$2 \text{ اثبت أن } \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} + i} + \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = 1$$

3 حل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$

$$z - i = 4z + i(z - 2)$$

$$4 \text{ احسب } i^{1947}, i^4, i^3, i^2$$

استنتج حساب  $i^n$  تبعا لقيم العدد الطبيعي  $n$ .

### مرافق عدد مركب

5 عين مرافق كل من

$$z_2 = -3i + i(2i - 1) : z_1 = i(3 + 2i)$$

$$z_4 = (1 - 2i)^{10} : z_3 = \frac{2i - 1}{3 + 2i}$$

$$6 \text{ عدد مركب حيث } z = \frac{3 - 5i}{1 + i}$$

احسب  $z + \bar{z}$  و  $z - \bar{z}$ .

استنتج  $Re(z)$  ،  $Im(z)$ .

7 ميز الأعداد الحقيقية و الأعداد التخيلية

$$z - \bar{z} : z + \bar{z}$$

$$2 + z\bar{z} : 3 + z^2 : iz^2(\bar{z})^2$$

$$(z + i\bar{z})(z - i\bar{z}) : (z + i\bar{z})(\bar{z} - iz)$$

8  $z$  لاحقة النقطة  $M$ .

استعمل الشكل التالي لتحديد لاحقة كل نقطة من

النقط  $A, B, C, D, E, I, J$  من بين الأعداد المركبة

التالية :

## تمارين و مسائل

17 مثل بيانيا في مستو منسوب إلى معلم متعامد

و متجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  مجموعة النقط  $M$

ذات اللاحقة  $z$  حيث

$$(k \in \mathbb{Z}) : \arg z = \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

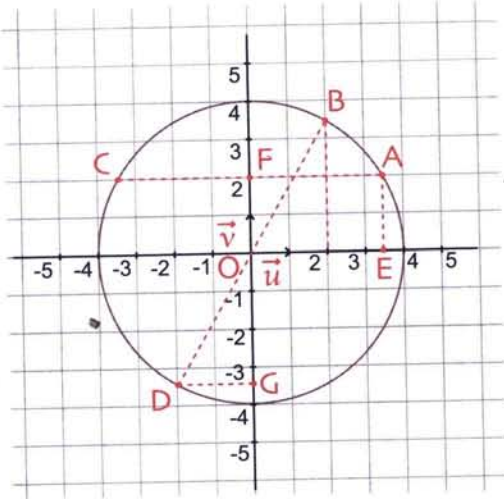
$$|z| = 2 \quad \text{ب)}$$

$$(k \in \mathbb{Z}) : \arg z = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad \text{و} \quad |z| = 2 \quad \text{ج)}$$

18 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

أ عين الطويلة و عمدة لكل لاحقة من لواحق النقط

$A, B, C, D, E, F, G$  الممثلة في الشكل التالي



ب) انشئ في المستوي السابق النقط  $L, K, H$

$$4e^{i\frac{7\pi}{6}}, 4e^{i\frac{5\pi}{3}}, 4e^{i\frac{\pi}{4}}$$

على الترتيب.

19 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{u}, \vec{v})$  و  $M, B, A$  نقط لواحقها على الترتيب

$$z, 3i, 2$$

$$\left| \frac{z-3i}{2-3i} \right| = 1 \quad \text{فسر هندسيا كلا من العلاقتين :}$$

$$(k \in \mathbb{Z}) : \arg \left( \frac{z-3i}{2-3i} \right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \text{و}$$

انشئ الشكل المناسب لمجموعة النقط  $M(z)$ .

## كتابة عدد مركب على الشكل المثلثي أو على الشكل الأسّي

12 عين الطويلة و عمدة لكل عدد مركب مما يلي

ثم اكتبه على الشكل المثلثي و على الشكل الأسّي.

$$z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$z = -2 \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$z = \sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12}$$

$$z = -\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12}$$

13 نفس السؤال السابق.

$$z = \frac{-1+i}{\sqrt{3}-i} \quad ; \quad z = \frac{\sqrt{3}-2}{1+i\sqrt{3}}$$

$$z = (-1+i)(\sqrt{6}+i\sqrt{2}) \quad ; \quad z = (1+i\sqrt{3})^4$$

$$z = \frac{\sqrt{3}-3i}{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})^3} \quad ; \quad z = \left( \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} \right)^3$$

14 اكتب كل عدد مركب مما يلي على الشكل

المثلثي و على الشكل الأسّي.

$$z_2 = 2 + 2i \quad ; \quad z_1 = 1 - i\sqrt{3}$$

$$z_4 = \frac{z_2}{z_1} \quad ; \quad z_3 = z_1 \cdot z_2$$

$$z_5 = z_1^3 \cdot z_2^4$$

15 اكتب العدد المركب  $z$  حيث

$$z = \frac{-1+3i\sqrt{3}}{5-i\sqrt{3}} \quad \text{على الشكل المثلثي.}$$

## الطويلة و العمدة

16 عدد مركب حيث

$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

احسب  $z^2$  ثم اكتبه على الشكل المثلثي.

استنتج طويلة  $z$  و عمدة له.



## تمارين و مسائل

### الاعداد المركبة والهندسة

بالنسبة للتمارين من 20 إلى 24 نرود المستوى بمعلم متعامد ومتجانس  $(\vec{u}, \vec{v}; O)$ .

**20** نعتبر النقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$ .

عين في كل حالة مجموعة النقط  $M(z)$  حيث

(أ)  $|4iz + 12| = 4|z + 1 - i|$

(ب)  $|iz - 3| = |z + i|$

(ج)  $|z + 5i| = 3$

(د)  $|iz - 3| = 4$

(هـ)  $|\bar{z} + 2 - i| = 2$

(و)  $|iz + 3| = |z + 2i|$

**21** نفس السؤال السابق.

(أ)  $k \in \mathbb{Z} : \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

(ب)  $k \in \mathbb{Z} : \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

(ج)  $k \in \mathbb{Z} : \arg(z) = k2\pi$

(د)  $k \in \mathbb{Z} : \arg(z) = k\pi$

**22** نفس السؤال السابق

(أ)  $k \in \mathbb{Z} : \arg(z) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

(ب)  $k \in \mathbb{Z} : \arg(z + 1) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

(ج)  $k \in \mathbb{Z} : \arg(z - i) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

**23** نفس السؤال السابق.

(أ)  $k \in \mathbb{Z} : \arg(\bar{z}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$

(ب)  $k \in \mathbb{Z} : \arg(iz) = \frac{\pi}{6} + k2\pi$

(ج)  $k \in \mathbb{Z} : \arg(-z) = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

**24** عين مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$

بحيث يكون

(أ)  $\frac{z-1}{z+2i}$  حقيقيا.

(ب)  $\frac{z-1}{z+2i}$  تخيليا صرفا.

(ج)  $k \in \mathbb{Z} : \arg \frac{z-1}{z+2i} = k\pi$

(د)  $k \in \mathbb{Z} : \arg \frac{z-1}{z+2i} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

**25** المستوى منسوب الى معلم متعامد ومتجانس

$(\vec{u}, \vec{v}; O)$  ، أنشئ مجموعة النقط  $M$  ذات

اللاحقة  $z$  حيث

(أ)  $\operatorname{Re}(z^2) = 0$

(ب)  $\operatorname{Im}(z^2) = 1$

(ج)  $\operatorname{Re}(z^2) = 0$  و  $\operatorname{Im}(z^2) = 1$

**26** المستوى منسوب الى معلم متعامد ومتجانس

عين مجموعة النقط  $M$  ذات اللاحقة  $z$  في كل

حالة من الحالتين التاليتين

(أ)  $(\bar{z} - 1)(z + 2)$  عدد حقيقي.

(ب) العدد  $\frac{z-2i}{z+4i}$  حيث  $z \neq -4i$  حقيقي.

**27** نفس السؤال السابق.

(أ) العدد  $\frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$  حيث  $z \neq -1$  حقيقي.

(ب) العدد  $\frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$  حيث  $z \neq -1$  تخيلي صرف.

**28**  $A, B, C$  نقط للاحقاتها على الترتيب

$z_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$  ،  $z_B = 2 - i$  ،  $z_A = -1 - i$

1. احسب قياسا للزاوية  $(\vec{CA}; \vec{CB})$ .

2. استنتج أن المستقيمين  $(CA)$  ،  $(CB)$  متعامدان.

**29** نفس السؤال من أجل  $(AC)$  و  $(AB)$  حيث

$z_C = 5 + 2i$  ،  $z_B = 4 - 5i$  ،  $z_A = 1 - i$

## تمارين و مسائل

$$2z^2 - 2(2 - i)z + 3 - 4i = 0$$

(ج) لتكن المعادلة ذات المجهول  $z$  في  $\mathbb{C}$

$$2z^3 - 2(3 - i)z^2 + (7 - 6i)z - 3 + 4i = 0$$

أوجد الحل الحقيقي لهذه المعادلة ثم الحلين الآخرين.

**37** حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة

$$z^4 + 8iz^2 + 48 = 0$$

### التحويلات النقطية و الأعداد المركبة

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس.

**38**  $A, B$  نقطتان لاحقاتهما على الترتيب

$$2 - 4i \text{ و } -1 - i.$$

(أ) عين لاحقة النقطة  $C$  صورة  $A$  بالتحاكي الذي مركزه  $B$  و نسبته  $-2$ .

(ب) عين لاحقة النقطة  $D$  صورة  $B$  بالدوران

الذي مركزه  $A$  و زاويته  $-\frac{\pi}{2}$ .

(ج) عين لاحقة النقطة  $E$  صورة  $B$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\overline{AB}$ .

(د) عين معاملات للنقط  $A, B, C$  حتى يكون مرجحها النقطة  $O$ .

**39** ميز في كل حالة مما يلي التحويل النقطي

الذي يحول كل نقطة  $M(z)$  إلى النقطة  $M'(z')$  حيث

$$(أ) z' = iz + 3 - i$$

$$(ب) z' = 2z - 3i$$

$$(ج) z' = z + 1 + i$$

$$(د) z' = -z + i$$

**40** عين طبيعة التحويل النقطي الذي يرفق بكل

نقطة  $M(z)$  النقطة  $M'(z')$  حيث

$$z' = \frac{\sqrt{3} + i}{2i} z + \sqrt{3} - i$$

**30**  $A, B, C$  نقط لاحقاتها على الترتيب

$$z_C = \frac{7}{3} - 6i, z_B = 1 - 2i, z_A = -\frac{1}{3} + 2i$$

1. احسب قياسا للزاوية  $(\overline{AB}; \overline{AC})$ .

2. استنتج أن المستقيمين  $(AB), (AC)$  متوازيان.

### دستور موافر و ترميز أولير

**31** احسب بطريقتين مختلفتين العدد

$$(\cos x + i \sin x)^2$$

استنتج  $\cos 2x$  و  $\sin 2x$

بدلالة  $\cos x$  و  $\sin x$

**32** احسب بطريقتين مختلفتين العدد

$$(\cos x + i \sin x)^3$$

استنتج  $\cos 3x$  و  $\sin 3x$

بدلالة  $\cos x$  و  $\sin x$

احسب  $\cos 3x$  بدلالة  $\cos x$ .

**33** عين مجموعة قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث

يكون العدد  $(1 + i\sqrt{3})^n$  حقيقيا . تخيليا صرفا.

**34** اكتب على الشكل الخطي العددين

$$\cos^3 x, \sin^3 x$$

استنتج الكتابة الخطية للعدد  $\sin^3 \frac{x}{3}$  و  $\cos^3 \frac{x}{3}$ .

### حل معادلات من الدرجة الثانية

**35** حل في مجموعة الاعداد المركبة  $\mathbb{C}$

المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية

$$z^2 - (2 - i)z + 3 - i = 0$$

**36** (أ) عين العددين الحقيقيين  $\alpha, \beta$  حيث

$$(\alpha - i\beta) = -3 + 4i$$

(ب) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية :

مسائل

41 المستوى منسوب الى معلم متعامد و متجانس

$(\vec{v}, \vec{u}; O)$ ، (الوحدة هي 2cm).

نعتبر النقطتين A، C ذوي اللاحقتين على الترتيب

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), \quad z_1 = \sqrt{2}(1+i)$$

1. عين الطويلة و عمدة لكل من  $z_1, z_3$ .

2. انشئ النقطتين A و C.

3. احسب  $\frac{z_3}{z_1}$  ثم استنتج قياسا للزاوية  $(\vec{OC}; \vec{OA})$ .

4. عين اللاحقة  $z_2$  للنقطة B بحيث يكون الرباعي

OABC مستطيلا. أرسم هذا المستطيل.

42 المستوى منسوب الى معلم متعامد

و متجانس  $(\vec{v}, \vec{u}; O)$ . A، B، C نقط للاحقاتها

على الترتيب  $z_1 = \sqrt{3} + i, z_2 = -1 - i$

$$z_3 = 1 - (2 + \sqrt{3})i$$

1. أ) احسب الطويلة و عمدة للعدد المركب

$$z = \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$$

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC.

2. أ) اكتب على الشكل الجبري العدد  $\frac{z_1}{z_2}$ .

ب) اكتب  $z_1, z_2$  على الشكل المثلثي.

ثم استنتج الشكل المثلثي للعدد  $\frac{z_1}{z_2}$ .

ج) استنتج من السؤال (2) القيمة المضبوطة لكل

$$\cos \frac{\pi}{12}, \sin \frac{\pi}{12}$$

43 1. حل في مجموعة الاعداد المركبة  $\mathbb{C}$

المعادلة ذات المجهول  $z$  حيث  $z^2 - 2iz - 2 = 0$

2. K، L، M نقط للاحقاتها على الترتيب

$$z_M = -\sqrt{3}, \quad z_L = -1 + i, \quad z_K = 1 + i$$

. انشئ هذه النقط في المستوى المزود بمعلم متعامد

و متجانس  $(\vec{v}, \vec{u}; O)$ ، (الوحدة هي 4cm).

3. أ) نسمي N نظيرة النقطة M بالنسبة إلى L. عين لاحقة N.

ب) لتكن A صورة M و C صورة N بالدوران الذي مركزه O و زاويته  $-\frac{\pi}{2}$

عين اللاحقتين  $z_A, z_C$  للنقطتين A و C.

ج) لتكن D صورة M و B صورة N بالانسحاب الذي شعاعه  $(2)\vec{u}$ .

عين اللاحقتين  $z_D, z_B$  للنقطتين D، B.

4. أ) عين منتصف كل من القطعتين [DB]، [AC].

$$\text{ب) احسب العدد } \frac{z_C - z_K}{z_B - z_K}$$

ج) استنتج طبيعة الرباعي ABCD.

44 ليكن T التحويل النقطي الذي يرفق بكل

نقطة  $M(z)$  من المستوى تختلف عن  $A(-3i)$

$$\text{و النقطة } M'(z') \text{ حيث } z' = -\frac{3iz + 7}{z + 3i}$$

1. برهن أن التحويل T يقبل نقطتين صامدتين

B، C يطلب اعطاء لاحقة كل منهما.

2. نسمي (8) الدائرة ذات القطر [BC].

لتكن M نقطة من (8) تختلف عن B و C

M' صورتها بالتحويل T.

أ) تحقق أن لاحقة النقطة M تحقق

$$z = -3i + 4e^{i\theta} \text{ حيث } \theta \text{ عدد حقيقي.}$$

ب) عبر عن اللاحقة  $z'$  للنقطة M' بدلالة  $\theta$ .

استنتج أن M' تنتمي إلى (8).

ج) برهن أن  $z' = -\bar{z}$  ثم استنتج انشاء هندسيا

للنقطة M'.



## حلول التمارين و المسائل

### الاعداد المركبة

$$z_1 + z_2 + z_3 = -1 + 8i \quad (1)$$

$$z_1 z_2 = -6 + 7i \quad ; \quad 3z_1 - 2z_2 + \frac{1}{2}z_3 = 9 - \frac{7}{2}i$$

$$\frac{1}{z_3} = -\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i \quad ; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{17} - \frac{9}{17}i$$

$$(z_1 z_2)^2 = -13 - 84i \quad ; \quad z_1^2 = 3 + 4i$$

$$\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} + \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{(\sqrt{3}-i)^2 + (\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)} = 1 \quad (2)$$

$$z = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i \quad (3)$$

$$i^{1947} = -i \quad ; \quad i^4 = 1 \quad ; \quad i^3 = -i \quad ; \quad i^2 = -1 \quad (4)$$

$$\bar{z}_2 = 3i + i(2 + 1) \quad ; \quad \bar{z}_1 = -i(3 - 2i) \quad (5)$$

$$\bar{z}_4 = (1 + 2i)^{10} \quad ; \quad \bar{z}_3 = \frac{-2i - 1}{3 - 2i}$$

$$z = \frac{3 - 5i}{1 + i} \quad (6)$$

$$z - \bar{z} = -8i \quad ; \quad z + \bar{z} = -2$$

$$\text{Im}(z) = -8 \quad ; \quad \text{Re}(z) = -2$$

$$2 + z\bar{z} \quad ; \quad z + \bar{z} \quad \text{الأعداد الحقيقية هي} \quad (7)$$

$$(z + i\bar{z})(z - i\bar{z}) \quad ; \quad (z + i\bar{z})(\bar{z} - iz)$$

$$2 + z\bar{z} \quad ; \quad z + \bar{z} \quad \text{الأعداد التخيلية الصرفة هي}$$

$$(iz^2(\bar{z})^2 = i(z\bar{z})^2 \quad ; \quad iz^2(\bar{z})^2$$

$$O \text{ إلى } M(z) \text{ نظيرة } C(-z) \quad (8)$$

$$A(\bar{z}) \text{ نظيرة } M(z) \text{ بالنسبة إلى } (O; \vec{u})$$

$$B(-\bar{z}) \text{ نظيرة } M(z) \text{ بالنسبة إلى } (O; \vec{v})$$

$$(z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)) \quad D(z + \bar{z})$$

$$(z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)) \quad E(z - \bar{z})$$

$$J\left(\frac{1}{2}(z - \bar{z})\right) \quad ; \quad I\left(\frac{1}{2}(z + \bar{z})\right)$$

## حلول التمارين و المسائل

**14 ملاحظة :** ترتيب الإجابات يتبع ترتيب الأسئلة من اليمين إلى اليسار.

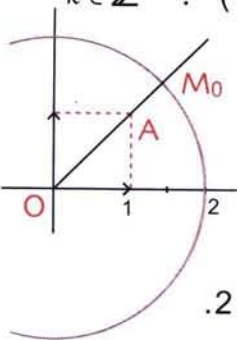
| العدد | الشكل المثلثي                                                                                | الشكل الأسّي                    |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| $z_1$ | $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$           | $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$          |
| $z_2$ | $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$                               | $2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$   |
| $z_3$ | $4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$ | $4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ |
| $z_4$ | $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$                            | $\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$  |
| $z_5$ | $512(\cos 0 + i\sin 0)$                                                                      | $512e^{i0}$                     |

**15** يكتب  $z$  على الشكل  $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  و منه نجد الشكلين المثلثي  $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$  و الأسّي  $e^{i\frac{2\pi}{3}}$

**16** لدينا  $z^2 = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$  و منه الشكل المثلثي  $z^2 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$  نستنتج أن  $\arg(z) = -\frac{\pi}{8}$  :  $|z| = 2$

**17** (أ) مجموعة النقط  $M(z)$

حيث  $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$  هي مجموعة النقط  $M$  حيث  $(\vec{i}; \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$  :  $k \in \mathbb{Z}$  أي نصف المستقيم  $[OA)$  حيث  $A(1+i)$



(ب) مجموعة النقط  $M(z)$  حيث  $|z| = 2$  هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 2.

(ج) مجموعة النقط  $M(z)$  حيث

$|z| = 2$  و  $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$  :  $k \in \mathbb{Z}$  هي تقاطع المجموعتين السابقتين أي هي النقطة  $M_0(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ .

**9**  $z_2 = 5 - i$  :  $z_1 = 2 + 2i$

$z_4 = 8 + 6i$  :  $z_3 = 2$

$z_6 = -5 + 14i$  :  $z_5 = -21 - 20i$

**10**  $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}i$  :  $z_1 = \frac{1}{10} - \frac{17}{10}i$

$z_3 = \frac{8}{5} + \frac{11}{5}i$

**11**  $z = 2x + 2 + (-5 + 5x)i$

$\text{Im}(z) = 5x - 5$  :  $\text{Re}(z) = 2x + 2$

$z$  حقيقي من أجل  $x = 1$ .

$z$  تخيلي صرف من أجل  $x = -1$ .

**12 ملاحظة :** ترتيب الإجابات يتبع ترتيب الأسئلة

| الشكل الأسّي             | الشكل المثلثي للعدد $z$                                                              | $\arg z$           | $ z $ |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|-------|
| $2e^{-i\frac{\pi}{12}}$  | $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$ | $-\frac{\pi}{12}$  | 2     |
| $2e^{i\frac{13\pi}{12}}$ | $2\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$                         | $\frac{13\pi}{12}$ | 2     |
| $e^{i\frac{5\pi}{12}}$   | $\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}$                                         | $\frac{5\pi}{12}$  | 1     |
| $e^{i\frac{7\pi}{12}}$   | $\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}$                                         | $\frac{7\pi}{12}$  | 1     |

**13 ملاحظة :** ترتيب الاجابات يتبع ترتيب الاسئلة من اليمين إلى اليسار.

| الشكل الأسّي                                             | الشكل المثلثي للعدد $z$                                                                    | $\arg z$           | $ z $                    |
|----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|--------------------------|
| $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}}$ | $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ | $\frac{2\pi}{3}$   | $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$                | $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$              | $\frac{11\pi}{12}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$     |
| $16e^{i\frac{4\pi}{3}}$                                  | $16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$                                  | $\frac{4\pi}{3}$   | 16                       |
| $4e^{i\frac{11\pi}{12}}$                                 | $4\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$                               | $\frac{11\pi}{12}$ | 4                        |
| $e^{i\frac{3\pi}{2}}$                                    | $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$                                                 | $\frac{3\pi}{2}$   | 1                        |
| $\frac{\sqrt{6}}{16}e^{i\frac{\pi}{6}}$                  | $\frac{\sqrt{6}}{16}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$                   | $\frac{\pi}{6}$    | $\frac{\sqrt{6}}{16}$    |

## حلول التمارين والمسائل

18 أ.

$$|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = |z_E| = |z_F| = |z_G| = 4$$

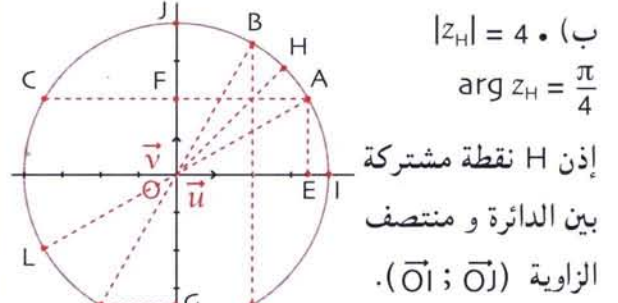
$$\arg z_A = \frac{\pi}{6} \text{ (مسقط A على (O) هو منتصف [OJ])}$$

$$\arg z_E = 0 ; \arg z_C = \pi - \frac{\pi}{6} ; \arg z_B = \frac{\pi}{3}$$

$$\arg z_G = -\frac{\pi}{2} ; \arg z_F = \frac{\pi}{2} ; \arg z_D = \pi + \frac{\pi}{2}$$

$$|z_H| = 4 \bullet$$

$$\arg z_H = \frac{\pi}{4}$$



إذن H نقطة مشتركة بين الدائرة و منتصف

الزاوية  $(\vec{OI}; \vec{OB})$ .

$$\arg z_K = \frac{5\pi}{3} ; |z_K| = 4$$

إذن H هي نظيرة B بالنسبة إلى (OI).

$$\arg z_L = \frac{7\pi}{6} ; |z_L| = 4$$

إذن L هي نظيرة A بالنسبة إلى O.

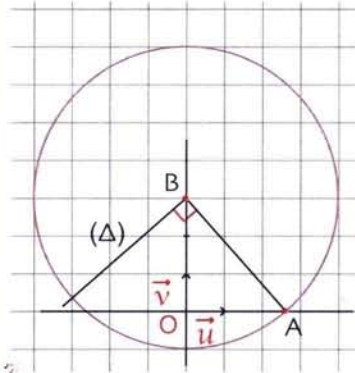
19 •

$$\frac{|z - 3i|}{|2 - 3i|} = \frac{BM}{BA}$$

$$\frac{BM}{BA} = 1$$

يعني  $BM = BA$

مجموعة النقط M



هي دائرة مركزها B و نصف قطرها  $BA (BM = \sqrt{13})$

$$\arg \left( \frac{z - 3i}{2 - 3i} \right) = (\vec{BM}; \vec{BA}) \bullet$$

مجموعة النقط M حيث  $(\vec{BM}; \vec{BA}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

هو نصف المستقيم  $(\Delta)$  العمودي على (AB)

في B (باستثناء B) و المحتوي في نصف المستوي

المحدود بالمستقيم (OB) و الذي لا يشمل النقطة A.

20 • مجموعة النقط  $M(x; y)$  هي :

$$\text{أ. المستقيم } \Delta_1 : 2x + 4y - 7 = 0$$

$$\text{ب. المستقيم } \Delta_2 : y = -2$$

$$\text{ج. الدائرة } (C_1) : x^2 + y^2 + 10y + 16 = 0$$

مركزها  $\omega(0; -5)$  و نصف قطرها 3.

$$\text{د. الدائرة } (C_2) : x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$$

مركزها  $\omega(0; -3)$  و نصف قطرها 4.

$$\text{هـ. الدائرة } (C_3) : x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$$

مركزها  $\omega(-2; -1)$  و نصف قطرها 2.

$$\text{و. المستقيم } \Delta_3 : y = \frac{1}{2}$$

21 • مجموعة النقط M هي :

أ. نقط محور الترتيب ذات الترتيب الموجبة تماما.

ب. نقط محور الترتيب باستثناء المبدأ.

ج. نقط محور الفواصل ذات الفواصل الموجبة تماما.

د. نقط محور الفواصل باستثناء المبدأ.

22 • بالرجوع إلى تعريف عمدة عدد مركب

$$\text{أ. } (\vec{i}; \vec{OM}) = \frac{\pi}{4} + k\pi \bullet$$

هي منتصف  $(\vec{i}; \vec{j})$  باستثناء المبدأ O.

ب. لتكن A(-1) إذن  $\vec{AM}(z+1)$

$$\arg(z+1) = (\vec{i}; \vec{OM})$$

هي نصف المستقيم  $(\Delta_2)$  طرفه A (باستثناء A)

و يشمل  $J(0; 1)$ .

$$\text{ج. لدينا } \vec{JM}(z-1)$$

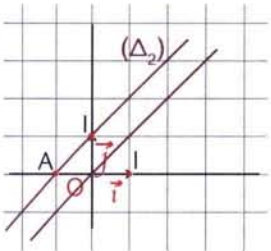
$$\arg(z-1) = (\vec{i}; \vec{JM})$$

$$\text{أي } (\vec{i}; \vec{JM}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$$

مجموعة النقط M

هي نصف المستقيم  $(\Delta_3)$  طرفه J

(باستثناء J) و محمول على  $(\Delta_2)$ .





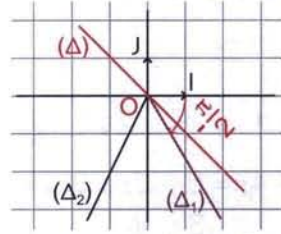
## حلول التمارين والمسائل

**23 أ .** لدينا  $\arg \bar{z} = -\arg z$  إذن مجموعة النقط  $M$  هي النصف الثاني  $(\Delta)$  باستثناء  $O$ .

**ب .**  $\arg(iz) = \frac{\pi}{2} + \arg z$  إذن

$\arg z = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$  مجموعة النقط  $M$  هي

نصف المستقيم  $(\Delta_1)$  طرفه  $O$  (باستثناء  $O$ ) ويشمل نقطة مثل  $A(1; \sqrt{3})$  وميله  $-\sqrt{3}$ .



**ج .** لدينا

$$\arg(-z) = \pi + \arg z$$

إذن مجموعة النقط  $M$

هي نصف المستقيم  $(\Delta_2)$

نظير  $(\Delta_1)$  بالنسبة إلى محور الترتيب.

**24** نسمي  $\operatorname{Re}(z)$  و  $\operatorname{Im}(z)$  الجزئين الحقيقي

و التخيلي للعدد  $Z = \frac{z-1}{z+2i}$ .

$$\operatorname{Im}(Z) = \frac{-2x+y+2}{x^2+(y+2)^2} = 0$$

مجموعة النقط  $M(z)$  في هذه الحالة هي المستقيم

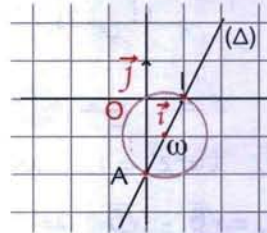
$$\Delta: 2x - y - 2 = 0 \text{ باستثناء النقطة } A(0; -2).$$

**ب .**  $Z$  تخيلي صرف يعني

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{x^2+y^2-x+2y}{x^2+(y+2)^2} = 0$$

مجموعة النقط  $M(z)$  هي الدائرة  $(C)$  التي مركزها

$$A\left(\frac{1}{2}; -1\right) \text{ وتشمل المبدأ باستثناء } A.$$



**ج .** نعتبر النقطتين

$$A(-2), I(1)$$

مجموعة النقط  $M$  تحقق

$$(\vec{AM}; \vec{IM}) = 4\pi$$

و هي المستقيم  $(\Delta)$  باستثناء  $A$ .

**د .** مجموعة النقط  $M$  تحقق

$$(\vec{AM}; \vec{IM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

و هي الدائرة  $(C)$  باستثناء  $A$  و  $I$ .

**25 أ .** مجموعة النقط  $M$  تحقق المعادلة

$$x^2 - y^2 = 0 \text{ (اتحاد المنصفين الأول و الثاني)}$$

**ب .** مجموعة النقط  $M$  تحقق  $y = \frac{1}{2x}$  (قطع زائد).

**ج .** مجموعة النقط  $M$  تحقق  $x^2 - y^2 = 1$  (قطع زائد).

**26 أ .** مجموعة النقط  $M$  تحقق المعادلة

$$x^2 + y^2 + x - 2 = 0 \text{ وهي الدائرة التي مركزها}$$

$$\omega\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \text{ و نصف قطرها } \frac{3}{2}.$$

**ب .** مجموعة النقط  $M$  تحقق  $\frac{x^2 + y^2 + 2y - 8}{x^2 + (y+4)^2}$

و هي الدائرة التي مركزها  $\omega(0; -1)$  و نصف

قطرها 3 باستثناء  $A(0; -4)$ .

**27 أ .** مجموعة النقط  $M$  تحقق المعادلة  $y = 0$

مع  $(x; y) \neq (-1; 0)$  وهي محور الفواصل

باستثناء  $A(-1; 0)$ .

**ب .** مجموعة النقط  $M$  تحقق  $x^2 + y^2 + 3x + 2 = 0$

مع  $(x; y) \neq (-1; 0)$  وهي الدائرة التي مركزها

$$\omega\left(-\frac{3}{2}; 0\right) \text{ و نصف قطرها } \frac{1}{2} \text{ باستثناء } A$$

$$(\vec{CA}; \vec{CB}) = \arg \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{\pi}{2} \cdot 1 \quad \text{28}$$

2. نستنتج أن  $(CA)$ ،  $(CB)$  متعامدان.

$$(\vec{AB}; \vec{AC}) = \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\pi}{2} \quad \text{29}$$

و بالتالي  $(AB)$ ،  $(AC)$  متعامدان.

$$(\vec{AB}; \vec{AC}) = \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 0 \cdot 1 \quad \text{30}$$

2. و بالتالي  $(AB)$ ،  $(AC)$  متوازيان.

## حلول التمارين و المسائل

• نستنتج الكتابة الخطية للعدد  $\sin \frac{x}{3}$  ،  $\cos \frac{x}{3}$

$$\cos \frac{x}{3} = \frac{1}{4} \left( \cos x + 3 \cos \frac{x}{3} \right)$$

$$\sin \frac{x}{3} = -\frac{1}{4} \left( \sin x - 3 \sin \frac{x}{3} \right)$$

$$\Delta = (2 - i)^2 - 4(3 - i) = -9 \quad (35)$$

للمعادلة  $z^2 - (2 - i)z + 3 - i = 0$  حلان هما

$$z = 1 - 2i \quad \text{أو} \quad z = 1 - i$$

$$\alpha = 1 \quad \text{و} \quad \beta = 2. \quad (36)$$

ب. للمعادلة  $2z^2 - 2(2 - i)z + 3 - 4i = 0$

$$z = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \quad \text{أو} \quad z = \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$$

ج. إذا كان  $\alpha$  حلا حقيقيا للمعادلة

$$2z^3 - 2(3 - i)z^2 + (7 - 6i)z - 3 + 4i = 0 \quad (*)$$

فإن  $\alpha$  تحققها.

و نجد بعد تعويض  $z$  بالعدد  $\alpha$  و الاختصار الجملة

$$\begin{cases} 2\alpha^3 - 6\alpha^2 + 7\alpha - 3 = 0 \\ \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \end{cases}$$

$\alpha = 1$  يحقق هذه الجملة و هو الحل الحقيقي.

$$(z - 1)(2z^2 - 2(2 - i)z + 3 - 4i) =$$

$$2z^3 - 2(3 - i)z^2 + (7 - 6i)z - 3 + 4i$$

إذن الحلان الآخران للمعادلة  $(*)$  هما حلا المعادلة

الواردة في أ.

$$t^2 + 8it + 48 = 0 \quad \text{إذن} \quad z^2 = t \quad (37)$$

$$t = z^2 = -12i \quad \text{أو} \quad t = z^2 = i$$

$$z_2 = -z_1 \quad \text{أو} \quad z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{6}$$

$$z_4 = -z_3 \quad \text{أو} \quad z_3 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_c = -7 - i : z_c = k z_A + (1 - k) z_B. \quad (38)$$

$$z_D = 5 - i : z_D = e^{i\theta} z_B + (1 - e^{i\theta}) z_A.$$

$$(\cos x + i \sin x)^2 = \cos 2x + i \sin 2x \quad (31)$$

(حسب قانون موافر)

$$(\cos x + i \sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 2i \sin x \cos x$$

(حسب ثنائي الحد لنيوتن)

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \text{نستنتج أن}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x \quad (32)$$

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$$

$$+ i (3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x)$$

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x \quad \text{نستنتج أن}$$

$$\sin 3x = 3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \text{لدينا}$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x \quad \text{إذن نكتب أيضا}$$

$$(1 + i\sqrt{3})^n = 2^n \left( \cos n \frac{\pi}{3} + i \sin n \frac{\pi}{3} \right) \quad \text{لدينا} \quad (33)$$

$$\sin n \frac{\pi}{3} = 0 \quad \text{عدد حقيقي يعني}$$

إذن  $n$  مضاعف 3.

$$\cos n \frac{\pi}{3} = 0 \quad \text{تخبي صرف يعني}$$

و هذه المعادلة ليس لها حل في مجموعة الاعداد

الطبيعية و بالتالي مجموعة الحلول خالية.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{لدينا} \quad (34)$$

$$\cos^3 x = \left[ \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right]^3 = \frac{1}{8} [e^{i3x} + e^{-i3x} + 3(e^{ix} + e^{-ix})]$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} (\cos 3x + 3 \cos x) \quad \text{إذن}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} : \sin^3 x = \left[ \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right]^3$$

$$\sin^3 x = \frac{1}{8i} [e^{i3x} - e^{-i3x} - 3(e^{ix} - e^{-ix})]$$

$$\sin^3 x = -\frac{1}{4} (\sin 3x - 3 \sin x) \quad \text{إذن}$$



## حلول التمارين والمسائل

42 (أ. 1)  $\arg z = -\frac{\pi}{2}$   $|z| = 1$  .

(ب)  $\frac{BC}{BA} = 1$  و  $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{2}$

نستنتج أن المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين.

(أ. 2)  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{i(-1+\sqrt{3})}{2}$  .

(ب)  $z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$  .

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$

$\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{13\pi}{12}\right)\right)$

(ج)  $\frac{z_1}{z_2} = -\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12} + i \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{12}$  .

$= -\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{i(-1+\sqrt{3})}{2}$

إذن  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$  و  $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

43 (أ. 1)  $z = -1 + i$  أو  $z = 1 + i$  .

2. تنشأ النقط  $M, L, k$  اعتمادا على المعطيات.

(أ. 3)  $z_N = -2 + \sqrt{3} + 2i$

(ب)  $z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_M = \sqrt{3} i$

$z_C = e^{i\frac{\pi}{2}} z_N = 2 - (\sqrt{3} - 2)i$

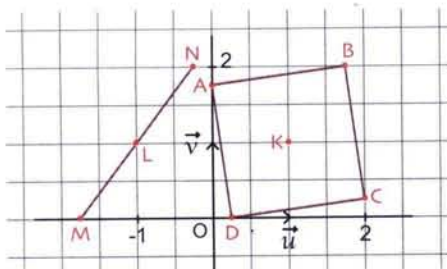
(ج)  $z_D = z_M + 2 = -\sqrt{3} + 2$

$z_B = z_N + 2 = \sqrt{3} + 2i$

4. (أ) لاحقة منتصف [DB] هي  $1 + i$  هي  $\frac{1}{2}(z_D + z_B)$

أي لاحقة منتصف [AC] هي  $1 + i$  هي  $\frac{1}{2}(z_A + z_C)$

أي K ومنه [AC] و [DB] متناصفان في K.



(ج)  $z_E = -4 - 2i$  :  $z_E = z_B + z_{\overrightarrow{AB}}$

(د) O مرجع النقط A, B, C المرفقة على الترتيب

بالمعاملات  $\alpha, \beta, \gamma$  .

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta - 7\gamma = 0 \\ 4\alpha + \beta - 5\gamma = 0 \end{cases}$$
 ,  $\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C$

باعتبار  $\gamma$  وسيطا و حل الجملة السابقة

نجد  $\alpha = 2\gamma$  ,  $\beta = -3\gamma$  ,  $\gamma \neq 0$

باختيار  $\gamma = 1$  نجد  $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -3, 1)$

39 (أ) التحويل دوران  $R\left(\omega; \frac{\pi}{2}\right)$  :  $\omega(2 + i)$

(ب) التحويل تحاك  $H(\omega; 2)$  :  $\omega(3i)$

(ج) التحويل انسحاب  $T_{\vec{v}}$  :  $\vec{v}(1 + i)$

(د) التحويل تناظر مركزي  $S_\omega$  :  $\omega\left(\frac{i}{2}\right)$

40 التحويل دوران  $R\left(\omega; -\frac{\pi}{3}\right)$  :  $\omega(-2i)$

41 (أ. 1)  $|z_1| = 2$  :  $\arg z_1 = \frac{\pi}{4} + k2\pi$  :  $k \in \mathbb{Z}$

$|z_3| = 1$  :  $\arg z_3 = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$

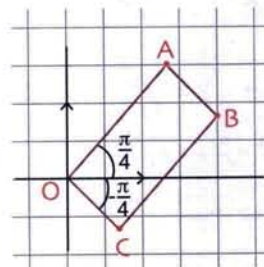
2. اعتمادا على طويلة  $z_1$

و عمدة له  $\frac{\pi}{4}$

ننشئ النقطة A.

و بالمثل بالنسبة

إلى النقطة C.



3.  $\frac{z_3}{z_1} = -\frac{i}{2}$  ومنه  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) = \arg \frac{z_3}{z_1} = -\frac{\pi}{2}$

4. OABC مستطيل يعني أن القطرين [AC], [OB]

متناصفان أي  $\frac{1}{2} z_2 = \frac{1}{2} (z_1 + z_3)$

ومنّه  $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (3 + i)$



## حلول التمارين و المسائل

(ب)  $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = \frac{1}{i}$

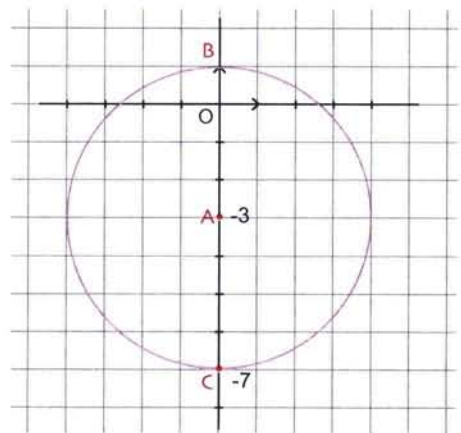
(ج)  $\left| \frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} \right| = 1$  أي  $KC = KB$

(ك)  $\perp$  (ك) أي  $\arg \frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = -\frac{\pi}{2}$   
إذن ABCD مربع.

44. 1. المعادلة  $z' = -\frac{3iz + 7}{z + 3i}$

أي  $z^2 + 6iz + 7 = 0$

تقبل حلين  $z_B = i$  و  $z_C = -7i$  و منه النقطتان الصامدتان B ، C.



1. أ. A منتصف [BC]

8 الدائرة التي مركزها A و نصف قطرها 4 باستثناء B ، C .

لدينا  $|z - z_A| = 4$  و  $z - z_A = 4e^{i\theta}$

إذن  $z = -3i + 4e^{i\theta}$  ( $\theta$  عدد حقيقي).

(ب)  $z' = -3i - 4e^{-i\theta}$  و منه  $|z' + 3i| = 4$

أو  $AM' = 4$  نستنتج أن  $M' \in (8)$

(ج)  $z' = -3i - 4e^{-i\theta}$  يعني  $z' = -\bar{z}$

نستنتج أن  $M'$  هي نظيرة  $M$  بالنسبة إلى محور الترتيب، و منه إنشاء  $M'$ .

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard\_equation

### • التشابه المستوي المباشر

#### تعريف

$\lambda$  عدد حقيقي موجب تماما.

نسمي تشابهها مستويا مباشرا نسبته  $\lambda$  كل تحويل نقطي  $S$  للمستوي في نفسه حيث : من أجل كل النقط  $A, B, M$  من المستوي ذات الصور  $A', B', M'$  على الترتيب وفق  $S$  يكون :

$$(k \in \mathbb{Z}), \begin{cases} \overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{AB} \\ (\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM}) + k2\pi \end{cases}$$

• التشابه المباشر الذي نسبته 1 يسمى تقايسا موجبا، و يسمى كذلك إزاحة.

• الإزاحة هي تقايس يحفظ المسافات والزوايا الموجهة.

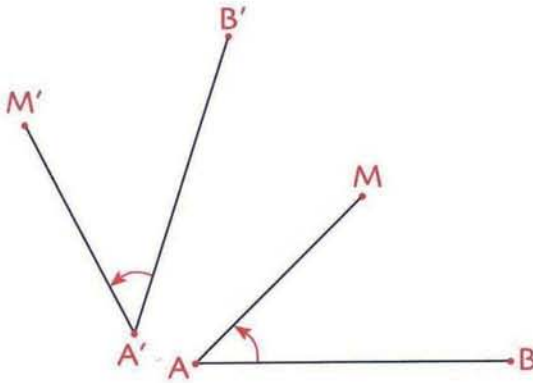
• كل إزاحة هي إنسحاب أو دوران.

• التحويل المطابق للمستوي هو تشابه مباشر نسبته 1.

• كل إنسحاب في المستوي هو تشابه مباشر نسبته 1.

• كل دوران هو تشابه مباشر نسبته 1.

• كل تحاك نسبته  $\lambda$  هو تشابه مباشر نسبته  $|\lambda|$ .



### • خواص

$S$  تحويل نقطي للمستوي.

• التحويل  $S$  تشابه مباشر إذا وفقط إذا كان  $S$  مركب تحاك وإزاحة.

• كل تشابه مباشر هو تحويل مطابق أو إنسحاب أو يقبل نقطة صامدة وحيدة تسمى مركز التشابه.

• كل تشابه مباشر  $S(\omega; \lambda; \theta)$  يمكن إعتباره مركبا تبديليا لدوران  $\tau(\omega; \theta)$  و تحاك  $h(\omega; \lambda)$  حيث  $\lambda > 0$  (أي  $h\circ\tau = \tau\circ h$ )

• كل تشابه مباشر مركزه  $\omega$  هو تشابه مباشر يتميز بالعناصر التالية : المركز  $\omega$ ، النسبة  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ )

و الزاوية  $\theta$  ( $\theta$  هو قياس لزاوية التشابه) حيث من أجل كل نقطة  $M$  تختلف عن  $\omega$  :

$$\text{عن } \omega : \begin{cases} \omega M' = \lambda \omega M \\ (\overrightarrow{\omega M}; \overrightarrow{\omega M'}) = \theta + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

• من أجل كل نقطتين  $A$  و  $B$  حيث  $A'$  و  $B'$  صورتاهما على الترتيب بالتشابه المباشر الذي نسبته  $\lambda$

$$\text{و زاويته } \theta, \begin{cases} \overrightarrow{A'B'} = \lambda \overrightarrow{AB} \\ (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'}) = \theta + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

• إذا كانت  $A, B, A', B'$  أربع نقط من المستوي بحيث  $A \neq B$  و  $A' \neq B'$  فإنه يوجد تشابه مباشر

وحيد  $S$  حيث  $S(A) = A'$  و  $S(B) = B'$ .



## • تركيب تشابهين مباشرين

• مركب تشابهين مباشرين لهما نفس المركز  $\omega$  هو تشابه مباشر مركزه  $\omega$ .

$$S(\omega, \lambda', \theta') \circ S(\omega, \lambda, \theta) = S(\omega, \lambda\lambda', \theta + \theta')$$

$$S(\omega, \lambda, \theta) \circ S(\omega, \lambda', \theta') = S(\omega, \lambda\lambda', \theta' + \theta)$$

• كل تشابه مباشر يحول مثلثا إلى مثلث مشابه له مباشرة

(لأن كل زاويتين متقابلتين فيهما متقايستان

ولهما نفس الاتجاه).

## • التعبير عن تشابه مباشر بالأعداد المركبة

### تعريف

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

كل تشابه مباشر يرفق بنقطة  $M(z)$  النقطة  $M'(z')$  يعرف بالعلاقة  $z' = az + b$  حيث  $a$  و  $b$  عدنان مركبان و  $a \neq 0$ .

• كل تحويل نقطي  $T$  يرفق بنقطة  $M(z)$  النقطة  $M'(z')$  حيث  $z' = az + b$  و  $a$  و  $b$  عدنان مركبان و  $a \neq 0$ ، هو تشابه مباشر نسبته  $|a|$ .

• إذا كان  $a = 1$  فإن التحويل  $T$  انسحاب شعاعه  $(b)$ .

• إذا كان  $a \neq 1$  فإن  $T$  يقبل نقطة صامدة واحدة  $\omega$  لاحتقتها  $\frac{b}{1-a}$  و  $T$  هو مركب تبديلي.

لتحاك مركزه  $\omega$  و نسبته  $|a|$  و دوران مركزه  $\omega$  (نفس مركز التحاكي) و زاويته  $\arg(a)$ .

نقول إن  $T$  هو تشابه مباشر مركزه  $\omega$  و نسبته  $|a|$ ، و زاويته  $\arg(a)$ .

**ملاحظة:** يمكن تعريف التشابه  $S(\omega, \bar{k}, \theta)$  الذي يرفق بنقطة  $M(z)$  النقطة  $M'(z')$

$$z' - z_0 = \bar{k}e^{i\theta}(z - z_0)$$

### • خواص

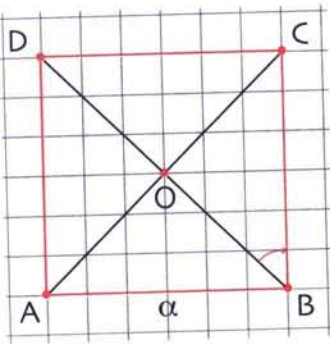
| الدوران $r(\omega; \theta)$                                                                         | التحاكي $\bar{h}(\omega; \bar{k})$ : $\bar{k} \neq 0$                                               | التشابه $S(\omega,  \bar{k} , \theta)$                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| يحفظ المسافات والمساحات                                                                             | يكبر (أو يصغر) بضرب المسافات في $\bar{k}$ . المساحات في $\bar{k}^2$                                 | يكبر (أو يصغر) بضرب المسافات في $\bar{k}$ . المساحات في $\bar{k}^2$                                   |
| يحفظ الزوايا الموجهة، المرجح التوازي، التعامد، التقاطع، الاستقامية، التماس.                         | يحفظ الزوايا الموجهة، المرجح، التوازي، التعامد، التقاطع، الاستقامية، التماس.                        | يحفظ الزوايا الموجهة، المرجح التوازي، التعامد، التقاطع، الاستقامية، التماس.                           |
| يحول مستقيماً إلى مستقيم.                                                                           | يحول مستقيماً إلى مستقيم يوازيه.                                                                    | يحول مستقيماً إلى مستقيم                                                                              |
| يحول دائرة $\mathcal{C}(O; R)$ إلى الدائرة $\mathcal{C}'(O'; R')$ حيث $O' = r(O)$ و $R' = \bar{k}R$ | يحول دائرة $\mathcal{C}(O; R)$ إلى الدائرة $\mathcal{C}'(O'; R')$ حيث $O' = r(O)$ و $R' = \bar{k}R$ | يحول دائرة $\mathcal{C}(O; R)$ إلى الدائرة $\mathcal{C}'(O'; R')$ حيث $O' = S(O)$ و $R' =  \bar{k} R$ |

1 التعرف على تشابه مباشر

تمرين 1

ABCD مربع مركزه O حيث  $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$ . تحويل نقطي يحول O إلى B و D إلى C. أثبت أن T تشابه مباشر مركزه A. حدد نسبته و زاويته.

حل



• نفرض أن المربع ABCD موجه توجيهها مباشرا لدينا  $O \xrightarrow{T} B$  و  $D \xrightarrow{T} C$

نضع  $AB = \alpha$  (حيث  $\alpha > 0$ ) لدينا  $\frac{BC}{OD} = \frac{\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha}$

إذن  $BC = \sqrt{2} OD$  و لدينا  $(\vec{OD}, \vec{BC}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$  حيث  $k \in \pi$

إذا فرضنا أن صورة A وفق T هي A' فإن المثلثين AOD و A'BC متشابهان مباشرة. بما أن المثلث AOD قائم في O و متساوي الساقين

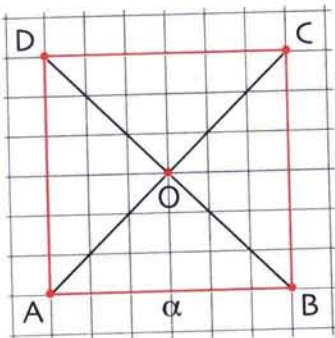
فإن المثلث A'BC قائم في B و متساوي الساقين. أي أن المثلث A'BC ينطبق على المثلث ABC. وبالتالي A' تنطبق على A (النقطة A صامدة بالتحويل T).

إذن T تشابه مركزه A ونسبة  $\sqrt{2}$  و زاويته  $-\frac{\pi}{4}$ .

تمرين 2

ABCD مربع مركزه O حيث  $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{2}$ .  $S_A, S_C$  و  $S_O$  تشابهات مباشرة حيث  $S_C$  مركزه C و يحول O إلى B.  $S_A$  مركزه A و يحول B إلى D.  $S_O$  مركزه O و يحول B إلى D. عيّن النسبة و زاوية كل من التشابهات  $S_A, S_C$  و  $S_O$ .

حل



• نضع  $AB = \alpha$  ( $\alpha > 0$ ).  $S_C: O \xrightarrow{S_C} B$  و  $C \xrightarrow{S_C} C$

نسبة التشابه  $S_C$  هي  $\frac{CB}{CO}$  و زاويته هي قياس  $(\vec{CO}, \vec{CB})$ .

حساب  $\frac{CB}{CO}$ : لدينا  $CO = \frac{CA}{2}$  و المثلث ABC قائم في A

و متساوي الساقين. إذن  $AC^2 = 2\alpha^2$ . ينتج أن  $AC = \alpha\sqrt{2}$ .

وبالتالي  $\frac{CB}{CO} = \frac{2CB}{CA} = \frac{2\alpha}{\alpha\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ . إذن نسبة التشابه  $S$  هي  $\sqrt{2}$ .



حساب قياس للزاوية  $(\vec{CO}, \vec{CB})$ . نلاحظ أن  $(CO)$  هو منصف الزاوية  $(\vec{CD}, \vec{CB})$ .

إذن  $\frac{\pi}{4}$  قياس للزاوية الموجهة  $(\vec{CO}, \vec{CB})$ . وبالتالي نسبة التشابه  $S_C$  هي  $\sqrt{2}$  و زاويته  $\frac{\pi}{4}$ .

• لدينا  $S_A \mid \begin{matrix} A \longrightarrow A \\ B \longrightarrow D \end{matrix}$ . نسبة  $S_A$  هي  $\frac{AD}{AB}$  و زاويته  $(\vec{AB}, \vec{AD})$ .

حساب  $\frac{AD}{AB}$ : لدينا  $\frac{AD}{AB} = 1$ ، إذن نسبة التشابه  $S_A$  هي 1.

حساب قياس للزاوية  $(\vec{AB}, \vec{AD})$ : هذه الزاوية قائمة و موجهة في الاتجاه المباشر. إذن  $\frac{\pi}{2}$  قياس لهذه

الزاوية. وبالتالي نسبة التشابه  $S_A$  هي 1 و زاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

• لدينا  $S_0 \mid \begin{matrix} O \longrightarrow O \\ B \longrightarrow D \end{matrix}$ . نسبة  $S_0$  هي  $\frac{OD}{OB}$  و هي 1 و زاويته  $(\vec{OB}, \vec{OD})$ ، و هي زاوية مستقيمة

و  $\pi$  قياس لها. وبالتالي نسبة التشابه  $S_0$  هي 1 و زاويته  $\pi$ .

إذن  $S_0$  دوران مركزه  $O$  و زاويته  $\pi$ . يمكن اعتبار  $S_0$  أيضا تحاكيا مركزه  $O$  و نسبته -1.

و هو أيضا تناظر مركزه  $O$ .

### تمرين 3

ABC مثلث متقايس الأضلاع،  $I$  منتصف  $[AC]$ . نسمي  $S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $A$

و يحول  $B$  إلى  $I$ .

• عين نسبة التشابه  $S$  و زاويته.

• انشئ النقطة  $D$  سابقة  $C$  بالتشابه  $S$ . برّر إجابتك.

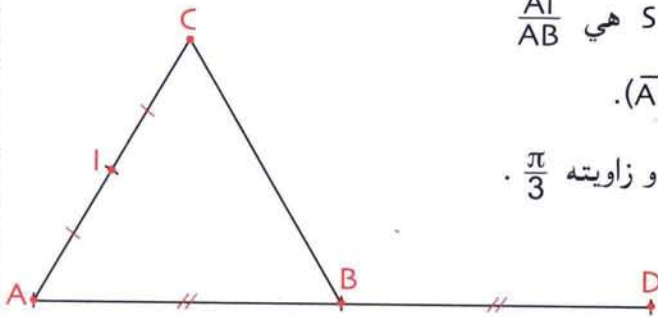
حل

• لدينا  $S \mid \begin{matrix} A \longrightarrow A \\ B \longrightarrow I \end{matrix}$ . إذن نسبة التشابه  $S$  هي  $\frac{AI}{AB}$

حيث  $\frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$ ، و زاويته  $(\vec{AB}, \vec{AI}) = \frac{\pi}{3}$ .

إذن  $S$  تشابه مباشر مركزه  $A$ ، نسبته  $\frac{1}{2}$  و زاويته  $\frac{\pi}{3}$ .

•  $D$  سابقة النقطة  $C$  يعني  $S(D) = C$ .



إذن  $AC = \frac{1}{2} AD$  و  $(\vec{AD}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{3}$ . وبالتالي النقطة  $D$

تنتمي إلى  $(AB)$  حيث  $AD = 2AB$ .

إذن  $D$  هي نظيرة  $A$  بالنسبة إلى  $B$ . (الشكل)



## تمرين 4

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة  $M(x; y)$  النقطة  $M'(x'; y')$  حيث  $\begin{cases} x' = x - y + 3 \\ y' = x + y - 4 \end{cases}$  لتكن z لاحقة M و z' لاحقة M'.

• عبّر عن z بدلالة z'.

• حدد طبيعة التحويل T و عناصره المميزة.

## حل

نضع  $Z = x + iy$  و  $z' = x' + iy'$  فيكون

$$\begin{aligned} z' = x' + iy' &= (x - y + 3) + i(x + y - 4) \\ &= x - y + 3 + ix + iy - 4i \\ &= (x + iy) + i(x + iy) + 3 - 4i = (1 + i)(x + iy) + 3 - 4i \\ z' &= (1 + i)z + 3 - 4i \end{aligned}$$

إذن

و هذه الكتابة على الشكل  $z' = az + b$  حيث  $a \neq 0$  إذن التحويل النقطي  $T: M(z) \rightarrow M'(z')$

حيث  $z' = (1 + i)z + 3 - 4i$  تشابه مباشر، مركزه النقطة الصامدة  $\omega$  ذات اللاحقة  $z_0$ . حل

المعادلة  $z' = (1 + i)z + 3 - 4i$  أي  $z = 4 + 3i$ .

إذن مركز التشابه T هو  $\omega(4 + 3i)$ . نسبته  $|1 + i|$  أي  $\sqrt{2}$  و زاويته  $\arg(1 + i)$  أي  $\frac{\pi}{4}$ .

إذن التحويل T تشابه مباشر مركزه  $\omega(4 + 3i)$  و نسبته  $\sqrt{2}$  و زاويته  $\frac{\pi}{4}$ .

## 2 التعبير عن تشابه مباشر بالأعداد المركبة

## تمرين 1

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

عبّر عن التشابه المباشر S بالعبارة  $z' = az + b$  حيث a و b عدنان مركبان في كل حالة مما يلي :  
S. إنسحاب شعاعه  $\vec{v}(3 - 2i)$ .

S. تشابه مباشر مركزه O و نسبته  $\sqrt{3}$  و زاويته  $-\frac{\pi}{6}$ .

S. تشابه مباشر مركزه  $\omega(4 - 3i)$  و نسبته 2 و زاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

## حل

لتكن  $M(z)$  نقطة من المستوي صورتها وفق S النقطة  $M'(z')$ .

• الانسحاب الذي شعاعه  $\vec{v}(3 - 2i)$  معرف بالعبارة  $z' = z + b$ .

إذن الانسحاب S الذي شعاعه  $\vec{v}(3 - 2i)$  يعرف كما يلي :  $z' = z + 3 - 2i$ .

• التشابه  $S(\omega, k, \theta)$  حيث  $\omega(z_0)$  يعرف بالعلاقة  $z' - z_0 = k e^{i\theta} (z - z_0)$

إذن التشابه  $S\left(0, \sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$  يعرف بالعلاقة  $z' = \sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}} z$

أو أيضا :  $z' = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}\right) z$  أي  $z' = \left(\frac{3}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$

**ملاحظة :** يعرف التشابه  $S\left(0, \sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$  كما يلي :

من أجل كل نقطة  $M$  تختلف عن  $O$  :  
حيث  $k \in \mathbb{Z}$   $\begin{cases} OM' = \sqrt{3} OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$

ينتج أن  $\left|\frac{z'}{z}\right| = \sqrt{3}$  و  $\arg \frac{z'}{z} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$

إذن  $\frac{z'}{z} = \sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}}$  أو  $z' = \sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}} z$

نلاحظ أن هذه العلاقة صحيحة من أجل النقطة الصامدة  $O$  مركز التشابه  $S$ .

• لدينا التشابه  $S\left(\omega, 2, \frac{\pi}{2}\right)$  حيث  $\omega$  النقطة ذات اللاحقة  $4 - 3i$ .

إذن التشابه  $S$  يعرف بالعلاقة  $z' - (4 - 3i) = 2e^{i\frac{\pi}{2}} (z - (4 - 3i))$  أو  $z' = 2iz - 2 - 11i$

**ملاحظة :** يمكن إعطاء تفسير هندسي كالآتي : التشابه  $S\left(\omega, 2, \frac{\pi}{2}\right)$  يرفق بكل نقطة  $M$  من المستوي

النقطة  $M'$  حيث  $\omega M' = 2\omega M$  و  $(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  مع  $k \in \mathbb{Z}$

أو أيضا  $\frac{\omega M'}{\omega M} = 2$  ،  $(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

و بالتالي  $\left|\frac{z' - z_0}{z - z_0}\right| = 2$  و  $\arg \frac{z' - z_0}{z - z_0} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  (حيث  $z_0 = 4 - 3i$ )

إذن  $\frac{z' - z_0}{z - z_0} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$  بعد الحساب و تعويض  $z_0$  نجد  $z' = 2iz - 2 - 11i$

## تمرين 2

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

لتكن النقط  $A(1; 0)$ ،  $B(-1; 1)$ ،  $C(0; 2)$  و  $D(-1; 5)$ .

عين التشابه المباشر  $S$  الذي يحول  $A$  إلى  $C$  و يحول  $B$  إلى  $D$ .

**حل**

$S$  تشابه مباشر يعني أنه يوجد عدنان مركبان  $a$  و  $b$  ( $a \neq 0$ ) حيث  $z' = az + b$

$S$  يحول  $A$  إلى  $C$  يعني  $z_C = az_A + b$  و  $S$  يحول  $B$  إلى  $D$  يعني  $z_D = az_B + b$

لدينا  $z_D = -1 + 5i$  ،  $z_C = 2i$  ،  $z_B = -1 + i$  ،  $z_A = 1$

و بتعويض  $z_D, z_B, z_C, z_A$  نجد الجملة ذات المجهولين  $a$  و  $b$  التالية :

$\begin{cases} a + b = 2i \\ (-1 + i)a + b = -1 + 5i \end{cases}$  و بحل هذه الجملة نجد  $a = 1 - i$  و  $b = -1 + 3i$

إذن  $z' = (1 - i)z - 1 + 3i$

**ملاحظة :** يمكن أن نكتب العلاقة الأخيرة تحليليا بوضع  $z = x + iy$  و  $z' = x' + iy'$  لدينا  $x' + iy' = (1 - i)(x + iy) - 1 + 3i$  ونجد  $\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = -x + y + 3 \end{cases}$

### تمرين 3

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .  
ليكن  $S$  التشابه المباشر المعرف بالعلاقة  $z' = (1 - i)z - 3 + i$ .  
حدد العناصر المميزة للتشابه  $S$ .

### حل

التحويل  $S$  ليس إنسحابا لأن  $1 - i \neq 1$ .  
إذن  $S$  يقبل نقطة صامدة وحيدة  $\omega$  لاحتقتها  $z_0$  حل المعادلة  $z = (1 - i)z - 3 + i$ .  
هذه المعادلة تكافئ  $-iz = 3 - i$  إذن  $z = 1 + 3i$   
وبالتالي مركز التشابه  $S$  هو النقطة  $\omega(1 + 3i)$ .  
نسبة التشابه  $S$  هي  $|1 - i| = \sqrt{2}$ . زاوية التشابه  $S$  هي عمدة للعدد  $1 - i$  وتكن  $-\frac{\pi}{4}$ .  
إذن  $S$  تشابه مباشر مركزه  $\omega(1 + 3i)$  ونسبته  $\sqrt{2}$  وزاويته  $-\frac{\pi}{4}$ .

### 3 تركيب تشابهين مباشرين

### تمرين 1

$S_1$  تشابه مباشر معرف بالعلاقة  $z' = (\sqrt{3} - i)z$  و  $S_2$  تشابه مباشر معرف بالعلاقة  $z' = iz - i$ .  
عين عبارة كل من التحويلين  $S_1 \circ S_2$  و  $S_2 \circ S_1$  ثم العناصر المميزة لكل منهما.

### حل

كل من  $S_1 \circ S_2$  و  $S_2 \circ S_1$  تشابه مباشر.  
لتكن النقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  والنقطة  $M'$  صورة  $M$  وفق  $S_1 \circ S_2$ .  
لدينا  $M' = S_1 \circ S_2(M) = S_1[S_2(M)]$ .  
عبارة  $S_1 \circ S_2$  تحسب كما يلي :  $z' = (\sqrt{3} - i)[iz - i] = (1 + i\sqrt{3})z - 1 - i\sqrt{3}$   
إذن عبارة التشابه  $S_1 \circ S_2$  هي  $z' = (1 + i\sqrt{3})z - 1 - i\sqrt{3}$   
تعيين العناصر المميزة للتشابه  $S_1 \circ S_2$ .  
مركز  $S_1 \circ S_2$  هو النقطة الصامدة  $\omega$  لاحتقتها  $z_0$  حل المعادلة  $z = (1 + i\sqrt{3})z - 1 - i\sqrt{3}$   
ينتج أن  $z = \frac{3 - i\sqrt{3}}{3}$  أي  $\omega(1 - \frac{i\sqrt{3}}{3})$ .  
نسبة  $S_1 \circ S_2$  هي  $|1 + i\sqrt{3}| = 2$ ، زاوية  $S_1 \circ S_2$  هي  $\arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ،  $k \in \mathbb{Z}$ .  
ينتج أن  $S_1 \circ S_2$  تشابه مباشر مركزه  $\omega(1 - \frac{i\sqrt{3}}{3})$  ونسبته 2 وزاويته  $\frac{\pi}{3}$ .



و بنفس الطريقة نعين عبارة  $S_2 \circ S_1$ .

$$z' = i[(\sqrt{3} - i)z] - i = (1 + i\sqrt{3})z - i \quad \text{لدينا}$$

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z - i \quad \text{هي } S_2 \circ S_1 \text{ إذن عبارة التشابه}$$

تعيّن العناصر المميزة للتشابه  $S_2 \circ S_1$  : مركز  $S_2 \circ S_1$  هو النقطة  $\omega'$  لاحقتها  $z_1$

$$\text{حل المعادلة } z = (1 + i\sqrt{3})z - i \quad (\text{أي } z = \frac{\sqrt{3}}{3})$$

النسبة هي  $|1 + i\sqrt{3}| = 2$  ، الزاوية هي  $\arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ،  $k \in \mathbb{Z}$ .

إذن  $S_2 \circ S_1$  تشابه مباشر مركزه  $\omega'(\frac{\sqrt{3}}{3})$  ، نسبته 2 ، زاويته  $\frac{\pi}{3}$ .

**ملاحظة :** يمكن تعيين عناصر كل من  $S_2 \circ S_1$  و  $S_1 \circ S_2$  اعتمادا على إعطاء العبارة المركبة

لكل من  $S_1$  و  $S_2$ . إذا فرضنا أن  $\alpha' + i\beta$  هي لاحقة مركز  $S_1 \circ S_2$ .

$$\text{بوضع } S_2(\omega) = A \quad \text{أي } z_1 = -\beta + i(\alpha - 1)$$

$$\text{و } S_1(A) = \omega \quad \text{أي } (\sqrt{3} - i)z_1 = \alpha + i\beta$$

$$\text{ينتج أن } \alpha + i\beta = (\sqrt{3} - i)(-\beta + i(\alpha - 1))$$

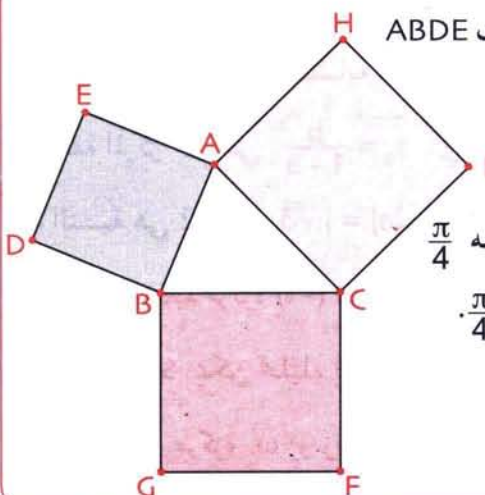
$$\text{وبالتالي : } \begin{cases} 2\alpha + \beta\sqrt{3} = 1 \\ \sqrt{3}\alpha = \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} \alpha = -\beta\sqrt{3} - \alpha + 1 \\ \beta = \beta + \sqrt{3}\alpha - \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{إذن } \alpha = 1 \text{ و } \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

أي أن لاحقة  $\omega$  ، مركز التشابه  $S_1 \circ S_2$  هي  $1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}$  ونسبة  $S_1 \circ S_2$  هي جداء نسبتي  $S_1$  و  $S_2$

أي  $2 \times 1$ . زاوية  $S_1 \circ S_2$  هي مجموع زاويتي  $S_1$  و  $S_2$  أي  $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$ .

و بنفس الطريقة نعين العناصر المميزة للتشابه  $S_2 \circ S_1$ .

## تمرين 2



مثلث (الشكل). ننشئ على أضلاع هذا المثلث المربعات ABDE

و BCFG ، CAHI. ليكن  $A'$  مركز المربع BCFG و  $B'$

مركز المربع CAHI و  $C'$  مركز المربع ABDE.

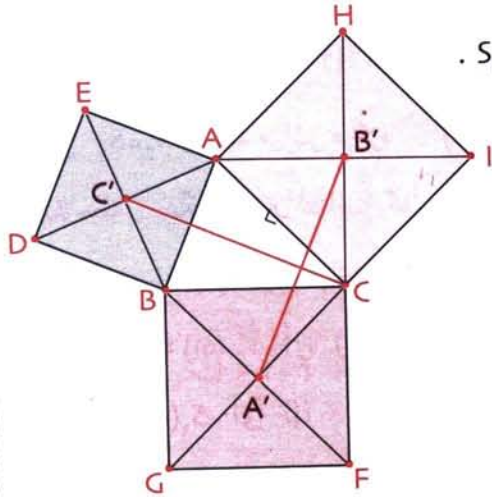
نعتبر التشابه المباشر  $S_C$  الذي مركزه C ونسبته  $\sqrt{2}$  و زاويته  $\frac{\pi}{4}$

و التشابه المباشر  $S_B$  الذي مركزه B ونسبته  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  و زاويته  $\frac{\pi}{4}$ .

• عين صورتي  $A'$  و  $B'$  بالتحويل  $S_B \circ S_C$ .

• استنتج أن  $A'B' = CC'$  و أن  $(A'B') \perp (CC')$ .

$S_C$  التشابه الذي مركزه  $C$  ونسبته  $\sqrt{2}$  وزاويته  $\frac{\pi}{4}$ .  
 ( لأن  $CA = \sqrt{2} CB'$  و  $(\overrightarrow{CB'}; \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{4}$  و بالمثل  $S_B$  التشابه الذي مركزه  $B$  ونسبته  $\frac{1}{\sqrt{2}}$   
 و زاويته  $\frac{\pi}{4}$  ( لأن  $BC' = \frac{1}{\sqrt{2}} BA$  و  $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC'}) = \frac{\pi}{4}$  )  
 نعلم أن  $S_B(A) = C'$  ;  $S_C(A') = F$  ;  $S_C(B') = A$   
 و  $S_B(F) = C$  إذن  $S_B \circ S_C(A') = C$  و  $S_B \circ S_C(B') = C'$



وبما أن نسبة التشابه  $S_B \circ S_C$  هي  $\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$  أي 1  
 فهو تقايس موجب (أي إزاحة). إذن  $A'B' = CC'$   
 وبما أن زاوية التشابه  $S_B \circ S_C$  هي  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$  أي  $\frac{\pi}{2}$   
 إذن  $(A'B') \perp (CC')$   
 ينتج أن  $A'B' = CC'$  و  $(A'B') \perp (CC')$

#### 4 تحليل تشابه مباشر

#### تمرين

$S$  التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة  $M(z)$  النقطة  $M'(z')$   
 حيث  $z' = (\sqrt{3} - i)z + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$   
 حلل  $S$  إلى تحاك و دوران.

عبارة التشابه  $S$  من الشكل :  $z' = az + b$  حيث  $a = \sqrt{3} - i$  ،  $b = 1 + i(\sqrt{3} - 1)$   
 تعيين العناصر المميزة للتشابه  $S$ .

لاحقة المركز  $\omega$  هي  $z_0 = \frac{b}{1-a}$  أي  $z_0 = \frac{1 + i(\sqrt{3} - 1)}{1 - (\sqrt{3} - i)}$  نجد  $z_0 = -i$   
 النسبة هي  $2 = |\sqrt{3} - i| = |a|$ . الزاوية هي  $\arg(a) = \arg(\sqrt{3} - i) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$  ،  $k \in \mathbb{Z}$   
 إذن  $S$  تشابه مركزه  $(-i)$  ، نسبته 2 وزاويته  $-\frac{\pi}{6}$ .

وبالتالي  $S$  يمكن تحليله إلى مركب تبديلي لتحاك  $h$  مركزه  $\omega$  ونسبته 2

ودوران  $r$  مركزه  $\omega$  وزاويته  $-\frac{\pi}{6}$  .  $S(\omega; 2, -\frac{\pi}{6}) = h_{(\omega, 2)} \circ r_{(\omega, -\frac{\pi}{6})} = r_{(\omega, -\frac{\pi}{6})} \circ h_{(\omega, 2)}$

تمرين 1

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

$\omega, A$  نقطتان لاحقتاهما على الترتيب 1،  $\frac{1}{3}(3 + i\sqrt{3})$ .

1. عين قياسا للزاوية  $(\vec{OA}; \vec{O\omega})$ . استنتج قياسا للزاوية  $(\vec{O\omega}; \vec{OA})$  و قيمة  $\frac{\omega A}{\omega O}$ .

ما هي عبارة التشابه  $S$  الذي يحول  $O$  إلى  $A$ ؟

2.  $t$  هو الإنسحاب الذي شعاعه  $\vec{j}$ .

حدد نسبة و زاوية التشابه  $S_1$  حيث  $S = t \circ S_1$ . حدد نسبة و زاوية التشابه  $S_2$  حيث  $S = S_2 \circ t$ .

حل

1. تعيين قياس للزاوية  $(\vec{OA}; \vec{O\omega})$ .

لدينا  $(\vec{OA}; \vec{O\omega}) = \arg z_\omega + k2\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$   $z_\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3} + i)$ .

$$\sin(\vec{OA}; \vec{O\omega}) = \frac{1}{2} \text{ و } \cos(\vec{OA}; \vec{O\omega}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } |z_\omega| = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{إذن } (k \in \mathbb{Z}), (\vec{OA}; \vec{O\omega}) = \frac{\pi}{6} + k2\pi$$

$$(\vec{O\omega}; \vec{OA}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + k2\pi \text{ أي } \frac{\pi}{3} \text{ قياس للزاوية } (\vec{O\omega}; \vec{OA}).$$

$$\frac{\omega A}{\omega O} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ (المثلث } OA\omega \text{ قائم في } A).$$

عبارة التشابه  $S$  الذي يحول  $O$  إلى  $A$ :

التشابه الذي يحول  $O$  إلى  $A$  معرف بمركزه  $\omega$  و نسبته  $\frac{1}{2}$  و زاويته  $\frac{\pi}{3}$ .

و يعرف أيضا بالعبارة  $z' - z_\omega = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_\omega)$  و بعد تعويض  $z_\omega$  بالعدد  $\frac{1}{3}(3 + i\sqrt{3})$

$$\text{و الاختصار نجد } z' = \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z + 1$$

2. تحديد نسبة و زاوية التشابه المباشر  $S_1$  حيث  $S = t \circ S_1$ .

لتكن  $k_1$  نسبة التشابه المباشر  $S_1$ . نعلم أن نسبة  $S$  هي  $\frac{1}{2}$  و نسبة  $t$  هي 1.

$$\text{إذن نسبة } S_1 \text{ تحقق } \frac{1}{2} = 1 \times k_1 \text{ أي } k_1 = \frac{1}{2}.$$

ينتج أن نسبة التشابه المباشر  $S_1$  هي  $\frac{1}{2}$ . لدينا زاوية  $S$  هي  $\frac{\pi}{3}$  و زاوية  $t$  منعدمة.

لتكن  $\theta_1$  زاوية التشابه  $S_1$ . إذن  $\theta_1$  تحقق  $\frac{\pi}{3} = 0 + \theta_1$  أي  $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ .

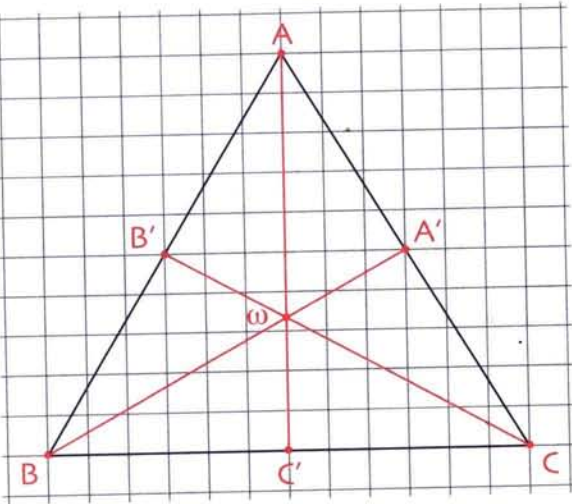
ينتج أن زاوية التشابه المباشر  $S_1$  هي  $\frac{\pi}{3}$ .

باستعمال نفس الطريقة نعين نسبة و زاوية التشابه المباشر  $S_2$ . و نجد: نسبة  $S_2$  هي  $\frac{1}{2}$  و زاويته  $\frac{\pi}{3}$ .



ABC مثلث متقايس الأضلاع،  $A'$  منتصف  $[AC]$ ،  $B'$  منتصف  $[AB]$ ،  $C'$  منتصف  $[BC]$ .  
عين تشابهها مباشرا  $S$  بحيث يحول  $A$  إلى  $A'$ ،  $B$  إلى  $B'$ ،  $C$  إلى  $C'$  (يمكن أن يعبر عنه بمركب تحويلين معروفين).

حل



ليكن  $\omega$  مركز ثقل المثلث ABC

(نقطة تلاقي متوسطات المثلث ABC).

التحاكي  $h$  الذي مركزه  $\omega$  ونسبته  $-\frac{1}{2}$ .

يحول  $A$  إلى  $C'$  (و  $B$  إلى  $A'$  و  $C$  إلى  $B'$ ).

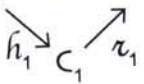
الدوران  $\tau$  الذي مركزه  $\omega$  وزاويته  $\frac{2\pi}{3}$

يحول  $C'$  إلى  $A'$  (و  $A'$  إلى  $B'$  و  $B'$  إلى  $C'$ )

أي أن  $A \xrightarrow{h} C' \xrightarrow{\tau} A'$

التحاكي  $h$  الذي نسبته سالبة  $(-\frac{1}{2})$  يمكن أن يعبر عنه بمركب (تبادلي) لتحاك  $h_1$  مركزه  $\omega$

ونسبته  $\frac{1}{2}$  ودوران  $\tau_1$  مركزه  $\omega$  وزاويته  $\pi$  أي  $h = \tau_1 \circ h_1$



إذن  $S = \tau \circ h = \tau \circ (\tau_1 \circ h_1)$

التحويل  $\tau_1 \circ h_1$  هو تشابه مباشر مركزه  $\omega$  ونسبته  $\frac{1}{2}$  وزاويته  $\pi$ .

أي  $\tau$  تشابه مباشر مركزه  $\omega$ ، نسبته 1 (دوران) وزاويته  $\frac{2\pi}{3}$ .

إذن  $S$  تشابه مركزه  $\omega$ ، نسبته  $\frac{1}{2}$  وزاويته  $\frac{2\pi}{3} + \pi$  (أو  $-\frac{\pi}{3}$ ).

بنفس الطريقة نبرهن أن  $S(B) = B'$  و  $S(C) = C'$ .

نستنتج أن التشابه المباشر الذي يحول  $A$  إلى  $A'$ ،  $B$  إلى  $B'$ ،  $C$  إلى  $C'$  هو التشابه المباشر الذي

مركزه  $\omega$  مركز ثقل المثلث ABC، ونسبته  $\frac{1}{2}$  وزاويته  $-\frac{\pi}{3}$ .

## تمارين و مسائل

### التعرف على تشابه مباشر

في التمارين ①، ②، ③، المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر.

① عين العناصر المميزة للتشابه المباشر  $S$  الذي يرفق بكل نقطة  $M(z)$  النقطة  $M'(z')$  في كل حالة مما يلي:

1.  $z' = -iz + 4$

2.  $z' = (1 - i\sqrt{3})z + 1$

3.  $z' = (1 + i)z - 1 - i$

4.  $z' = -2z + 3 + 2i$

② نفس السؤال في كل حالة مما يلي :

1.  $z' = z + 3 - 4i$

2.  $z' = 2iz$

3.  $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)z + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$

4.  $z' = (\sqrt{3} + i)z$

③  $A, B$  و  $C$  نقط لواحقها على الترتيب

$-3i$  ؛  $1$  ؛  $3 - 4i$ . عين النسبة و زاوية التشابه  $S$  الذي مركزه  $A$  و يحول  $B$  إلى  $C$ .

④  $ABCD$  مربع مركزه  $O$  حيث  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ .

عين النسبة و زاوية التشابه  $S$  في كل حالة مما يلي :

1.  $S$  مركزه  $A$  و يحول  $O$  إلى  $D$ .

2.  $S$  مركزه  $C$  و يحول  $D$  إلى  $B$ .

3.  $S$  مركزه  $O$  و يحول  $A$  إلى  $C$ .

⑤ المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر.

ليكن  $T$  التحويل النقطي الذي يرفق بكل

نقطة  $M(z)$  النقطة  $M'(z')$  حيث  $z' = 2\alpha z + 1 + i$  حيث  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

$\alpha \in \mathbb{C}$

عين قيم  $\alpha$  حتى يكون

1.  $T$  إنسحابا. 2.  $T$  دورانا.

3.  $T$  تحاكيا نسبته 4. 4.  $T$  تناظرا مركزيا.

⑥  $m$  عدد مركب،  $T$  تحويل نقطي يرفق بكل

نقطة  $M(z)$  من مستوي منسوب إلى معلم متعامد

و متجانس مباشر النقطة  $M'(z')$  حيث  $z' = az + b$ ،  $a \in \mathbb{C}^*$ ،  $b \in \mathbb{C}$ .

نفرض أن صورة  $A(-1 + 6i)$  هي  $B(2 + 3i)$

و صورة  $B$  هي  $C(m)$  وفق  $T$ .

1. عين  $m$  حتى يكون  $T$  إنسحابا.

2. عين  $m$  حتى يكون  $T$  دورانا.

حدد مركزه و زاويته.

⑦  $ABC$  مثلث متقايس الأضلاع حيث

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}, I \text{ منتصف } [BC].$$

$S_C$  التشابه المباشر الذي مركزه  $C$  و يحول  $A$  إلى  $I$ .

1. عين نسبة  $S_C$  و زاويته.

2. أنشئ النقطة  $D$  سابقة  $B$  وفق  $S_C$ .

⑧ نفس التمرين السابق من أجل التشابه المباشر

$S_A$  الذي مركزه  $A$  و يحول  $B$  إلى  $I$ .

⑨  $ABC$  مثلث متساوي الساقين في  $A$

و  $I$  منتصف  $[BC]$ .  $J$  نقطة تقاطع  $[AC]$

و الدائرة التي قطرها  $[AI]$ .

أثبت أن التشابه المباشر الذي مركزه  $A$  و يحول  $I$

إلى  $B$  يحول أيضا  $J$  إلى  $I$ .

⑩  $A, B$  و  $\omega$  نقط من المستوي و  $S$  التشابه المباشر

الذي مركزه  $\omega$  و يحول  $A$  إلى  $A'$  و  $B$  إلى  $B'$ .

1. برهن أن التشابه الذي مركزه  $\omega$  و الذي يحول

$A$  إلى  $B$  يحول أيضا  $A'$  إلى  $B'$ .

2. ماذا تستنتج بالنسبة إلى المثلثين

$\omega AA'$  و  $\omega BB'$  ؟



## تمارين و مسائل

### التعبير عن تشابه مباشر بالأعداد المركبة

في التمارين (11) و (12) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر.

**11** في كل ما يلي عبر عن التشابه المباشر  $S$  بالأعداد المركبة.

1. مركز  $S$  هو  $(-2 + i)$ ، نسبته  $\frac{1}{2}$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$ .
2. مركز  $S$  هو  $(-\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i)$ ، نسبته 2 و زاويته  $\frac{\pi}{3}$ .
3. مركز  $S$  هو  $(1; 1)$ ، نسبته  $\sqrt{2}$  و زاويته  $\frac{\pi}{4}$ .
4. مركز  $S$  هو  $(-1; 1)$ ، يحول  $A(5; 3)$  إلى  $B(0; -2)$ .

**12**  $A, B, C, D$  نقط من المستوي لواحقها

- على الترتيب  $1 - i, 2i, 5 - 7i$  و  $5 + 3i$ .
1. علم النقط  $A, B, C, D$ .
2. عين العبارة المركبة التي تعرف التشابه المباشر  $S$  حيث  $S(A) = C$  و  $S(B) = D$ .

**13** المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس و المباشر  $(A; \vec{AB}, \vec{AD})$  ، مربع ،  $ABCD$  ، مركزه

$K$  و منتصف  $[CD]$  .  $S$  التشابه المباشر الذي يحول  $A$  إلى  $I$  و يحول  $C$  إلى  $K$ .

1. ما هي لواحق النقط  $A, C, I, K$ ؟
2. عرف التشابه  $S$  بالأعداد المركبة.
3. استنتج العناصر المميزة للتشابه  $S$ .

### تركيب تشابهين مباشرين

**14** المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر.

$S$  و  $S'$  التشابهان المباشرين المعرفان على

الترتيب بالعبارتين  $z' = (1 + i)z + 2$  و  $z' = az + b$  حيث  $a \in \mathbb{C}^*$  ،  $b \in \mathbb{C}$ .

1. عين مركز  $S$  و نسبته و زاويته.
2. عين العلاقة بين  $a$  و  $b$  بحيث يكون  $S \circ S' = S' \circ S$  ما هو مركز  $S'$ ؟

**15**  $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$  معلم متعامد و متجانس مباشر.

$I$  منتصف  $[BC]$  . ليكن  $R_B$  الدوران الذي مركزه  $B$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$  ،  $T$  الإنسحاب الذي شعاعه  $\vec{BC}$  و  $R_C$  الدوران الذي مركزه  $C$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$  .

1. ما هي صورة  $I$  وفق  $S = R_C \circ T \circ R_B$  ؟
2. عبر بالأعداد المركبة عن التحويل  $S$ .
3. ما هي طبيعة التحويل  $S$ ؟ حدد عناصره المميزة.

### مسائل

**16** المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

نسمي  $S$  التحويل الذي يرفق بكل نقطة  $M(z)$

النقطة  $M'(z')$  حيث  $z' = (-1 + i)z + 2 - i$

1. بين أن  $S$  تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة.

2. ليكن  $S'$  التحويل الذي يرفق بكل نقطة  $M$

النقطة  $G$  مركز ثقل المثلث  $MM'M''$

حيث  $M' = S(M)$  و  $M'' = S \circ S(M)$ .

احسب بدلالة  $z$  لاحقة النقطة  $G$ .

• أثبت أن  $S'$  تشابه مباشر ثم حدد مركزه.

• عين لاحقة النقطة  $M_1$  حيث  $S'(M_1) = O$

( $O$  مبدأ المعلم).

• علم النقط  $M_1, M'_1, M''_1$  ثم  $I$

حيث  $M'_1 = S(M_1)$  و  $M''_1 = S \circ S(M_1)$

**17** المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

$A, B$  و  $C$  نقط من المستوي لواحقها على الترتيب

$$1 - i, i, -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$



## تمارين و مسائل

4. عبّر عن لاحقتي الشعاعين  $\overrightarrow{M\omega}$  ،  $\overrightarrow{MM'}$  بدلالة  $z$  لاحقة  $M$ .
- استنتج أن  $MM' = M\omega$ .
- احسب، من أجل كل نقطة  $M$  تختلف عن  $\omega$ ، قياسا للزاوية  $(\overrightarrow{MM'} ; \overrightarrow{M\omega})$ .
5. عيّن صورة  $I$  منتصف  $[OC]$  بالدوران الذي مركزه  $A$  منتصف  $[OA]$  و زاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

- 5 التحويل الذي يرفق بنقطة  $M$  ذات اللاحقة  $z$  بالنقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  حيث  $z' = \frac{(1+i)z + 1-i}{3}$
1. اثبت أن  $S$  تشابه مباشر يطلب اعطاء عناصره المميزة.
2. اثبت أن النقط  $A$  ،  $B$  ،  $\omega$  على استقامة واحدة حيث  $\omega$  مركز التشابه  $S$ .
3. عيّن قياس للزاوية  $(\overrightarrow{OB} ; \overrightarrow{OC})$ .
- اثبت أن المستقيم  $(OC)$  هو صورة المستقيم  $(OB)$  وفق  $S$ .
- عيّن النقطتين  $O'$  و  $B'$  صورتين  $O$  و  $B$  على الترتيب بالتحويل  $S$ .
- اثبت أن صورة  $(OB)$  هي  $(OO')$  ثم استنتج أن النقط  $O$  ،  $O'$  و  $C$  على استقامة واحدة.
4. اثبت أن  $\omega$  و  $C$  نقطتان من الدائرة التي قطرها  $[O'B]$ .

### 18 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

مباشر  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

نعتبر التحويل  $S$  الذي يرفق بكل نقطة  $M$  من المستوي ذات الاحداثيين  $(x ; y)$  بالنقطة  $M'$

$$\begin{cases} x' = x - y + 4 \\ y' = x + y + 4 \end{cases} \text{ حيث } (x' ; y')$$

1. عيّن اللاحقة  $z'$  للنقطة  $M'$  بدلالة اللاحقة  $z$  للنقطة  $M$ .

2. عيّن طبيعة التحويل  $S$  و عناصره المميزة.

3.  $A$  ،  $B$  ،  $C$  نقط من المستوي لواحقها على الترتيب  $-4$  ،  $4$  ،  $4 + 4i$ .

• حدّد صورتين كل من  $A$  و  $O$  بالتحويل  $S$  ثم عيّن صورة المستقيم  $(OA)$  و صورة محور القطعة  $[OA]$  بالتحويل  $S$ .

## حلول التمارين و المسائل

### التشابهات المباشرة

1 تعطى العناصر المميزة للتشابه S في الجدول أدناه.

| ملاحظة               | الزاوية          | النسبة     | لاحقة المركز $\omega$ |   |
|----------------------|------------------|------------|-----------------------|---|
| دوران                | $\frac{\pi}{2}$  | 1          | $2 - 2i$              | 1 |
| تشابه مباشر          | $-\frac{\pi}{3}$ | 2          | 1                     | 2 |
| تشابه مباشر          | $\frac{\pi}{4}$  | $\sqrt{2}$ | $2 - i$               | 3 |
| تناظر مركزه $\omega$ | $\pi$            | 2          | $1 + \frac{\pi}{4}i$  | 4 |

2

|                                |                 |   |   |   |
|--------------------------------|-----------------|---|---|---|
| $\vec{v}(3 - 4i)$ انسحاب شعاعه |                 |   |   | 1 |
| تشابه مباشر                    | $\frac{\pi}{2}$ | 2 | 0 | 2 |
| دوران                          | $\frac{\pi}{4}$ | 1 | 1 | 3 |
| تشابه مباشر                    | $\frac{\pi}{6}$ | 2 | 0 | 4 |

3 دوران مركزه A، زاويته  $-\frac{\pi}{2}$

4 نضع  $AB = \alpha$  ( $\alpha > 0$ )،  $k$  نسبة التشابه

S،  $\theta$  قياس زاوية له.

$$1. \theta = (\widehat{AO}, \widehat{AD}) = \frac{\pi}{4}, k = \frac{AB}{AO} = \sqrt{2}$$

$$2. \theta = (\widehat{CD}, \widehat{CB}) = \frac{\pi}{2}, k = \frac{CB}{CD} = 1$$

S دوران.

$$3. \theta = (\widehat{OA}, \widehat{OC}) = \pi, k = \frac{OC}{OA} = 1$$

S تناظر مركزي مركزه O.

$$5. 1. T انسحاب من أجل  $\alpha = \frac{1}{2}$$$

$$2. T دوران من أجل  $|\alpha| = \frac{1}{2}$  مع  $\alpha \neq \frac{1}{2}$$$

$$3. T تحاك نسبته 4 من أجل  $\alpha = 2$$$

$$4. T تناظر مركزي من أجل  $\alpha = -\frac{1}{2}$$$

$$6. 1. من أجل  $m = 5$  : T انسحاب شعاعه  $\vec{v}$$$

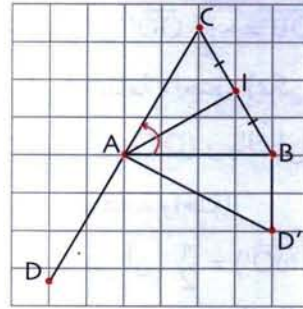
لاحقته  $3 - 3i$ .

$$2. من أجل  $m = -1$  : T دوران مركزه  $\omega$$$

لاحقتها  $-3 - i$  و زاويته  $-\frac{\pi}{2}$ .

## حلول التمارين و المسائل

7. 1. ليكن  $k$  نسبته  $S_C$ ،  $\theta$  زاويته.



$$k = \frac{CI}{CA} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = (\widehat{CA}, \widehat{CI}) = \frac{\pi}{3}$$

2. انشاء  $S_C(D) = B$

$$\begin{cases} CB = \frac{1}{2} CD \\ (\widehat{CD}, \widehat{CB}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

إذن D نظيرة C بالنسبة إلى A (الشكل).

8. 1. ليكن  $k$  نسبة  $S_A$  حيث  $S_A(B) = I$

$$\theta \text{ زاويته. } k = \frac{AI}{AB} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = (\widehat{AB}, \widehat{AI}) = \frac{\pi}{6}$$

2. انشاء  $D'$  حيث  $S_A(D') = B$

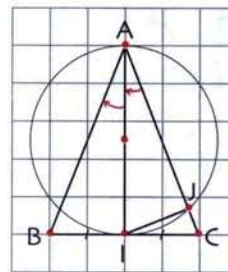
$$\text{لدينا } \begin{cases} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} AD' \\ (\widehat{AD'}, \widehat{AB}) = \frac{\pi}{6} \end{cases} \text{ إذن } D' \text{ تقاطع العمودي}$$

على (AC) في A و العمودي على (AB) في B (انظر شكل التمرين 7).

9. المثلثان AIB و AII

متشابهان إذن التشابه  $S_A$

الذي يحول I إلى B يحول أيضا I إلى A.



10. 1. من أجل التشابه المباشر  $S$

$$\text{يكون } \frac{\omega B}{\omega A} = \frac{\omega B'}{\omega A'} \text{ أي } \frac{\omega A'}{\omega A} = \frac{\omega B'}{\omega B}$$

و من أجل تشابه  $S_\omega$  الذي مركزه  $\omega$  و يحول A إلى B

$$\frac{\omega B}{\omega A} = \frac{\omega B'}{\omega A'} \text{ و لدينا مما سبق } \frac{\omega B}{\omega A} = \frac{\omega B'}{\omega A'}$$

أي أن أيضا  $S_\omega$  يحول  $A'$  إلى  $B'$ .

2. نستنتج أن المثلثين  $\omega BB'$ ،  $\omega AA'$  متشابهان.

$$z' = \frac{i}{2} z - \frac{3}{2} + 2i \cdot 1 \quad 11$$

$$z' = (1 + i\sqrt{3})z + \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i \cdot 2$$

$$z' = (1 + i)z + 1 - i \cdot 3$$

$$z' = -\frac{i}{2}z - \frac{3}{2} + \frac{i}{2} \cdot 4$$

12. 1. تعلم النقط في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

$$2. \text{ تعلم } z' = (3 - i)z + 3 - 3i$$

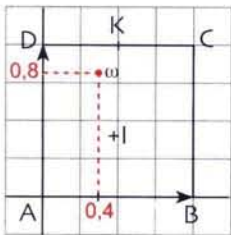
13. (A ;  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AD}$ ) معلم متعامد و متجانس.

1. لواحق النقط A, C, I, K هي على الترتيب

$$0 : 1+i : \frac{1}{2} + \frac{i}{2} : \frac{1}{2} + i$$

$$2. \text{ لدينا } z_K = az_C + b, z_I = az_A + b$$

و بعد التعويض و الاختصار نجد  $a = \frac{1+i}{4}$



$$b = \frac{1+i}{2} \text{ إذن عبارة } S$$

$$\text{هي } z' = \frac{1+i}{4}z + \frac{1+i}{2}$$

3. لاحقة  $\omega$  مركز S هو حل

$$\text{المعادلة } z' = z \text{ أي } z' = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$$

14. 1. لاحقة  $\omega$  مركز S هي حل المعادلة

$$z' = z \text{ أي } z' = 2i$$

نسبة S هي  $|1+i| = \sqrt{2}$ ، زاوية S هي  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

2. العلاقة بين a, b بحيث يكون  $SoS' = S'oS$

$$\text{هي } 2(1-a)i - b = 0$$

$$a = 1, S' \text{ انسحاب،}$$

$$a \neq 1, \text{ لاحقة مركز } S' \text{ هي } 2i.$$

15. 1. صور ا وفق S حيث  $S = R_C \circ T \circ R_B$

في المعلم المتعامد و المتجانس المباشر (A ;  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ )

نعين لاحقة J حيث  $J = R_B(I)$  و  $I(\frac{i}{2})$

لدينا  $R_B$  معرف كما يلي  $z' = iz + 1 - i$



## حلول التمارين و المسائل

فإن صورة (OB) هي (OO') بالتشابه S.  
نتحقق أن  $\vec{OB} = -\frac{3}{2} \vec{OO'}$  إذن النقط  $O, O', C$  على استقامة واحدة. (يمكن ملاحظة أن صورة O تنتمي إلى (OC) و بالتالي  $O, O', C$  على استقامة واحدة).  
4. نبرهن أن  $(\vec{\omega B}, \vec{\omega O'}) = \frac{\pi}{2}$ .  
و بالتالي  $\omega$  تنتمي إلى الدائرة التي قطرها [O'B].  
نبرهن أيضا أن  $(\vec{CO'}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{2}$ .  
إذن C تنتمي إلى الدائرة التي قطرها [O'B].

18. 1.  $\vec{z}' = (1+i)\vec{z} + 4 + 4i$ .  
2. S تشابه مباشر مركزه  $(-4+4i)$ ، نسبته  $\sqrt{2}$  و زاويته  $\frac{\pi}{4}$ .  
3.  $\vec{z}_{O'} = \vec{z}_C$  :  $\vec{z}_{A'} = \vec{z}_O$ .  
بما أن  $S(O) = C$  و  $S(A) = O$ .

فإن صورة (OA) بالتحويل S هي (OC).  
و صورة محور القطعة [OA] هي محور القطعة [OC].

4. لاحقة  $\vec{MM'}$  هي  $i\vec{z} + 4 + 4i$   
لاحقة  $\vec{M\omega}$  هي  $-\vec{z} - 4 + 4i$   
 $MM' = |(-y+4) + i(x+4)|$   
 $= |(-x-4) + i(-y+4)| = M\omega$

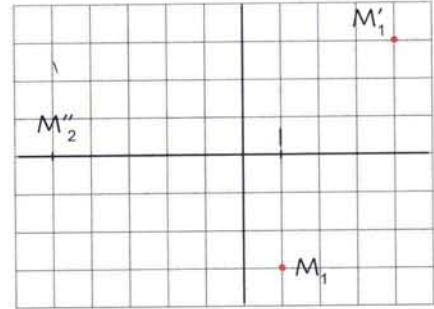
$(\vec{MM'}, \vec{M\omega}) = \arg\left(\frac{-\vec{z}-4+4i}{i\vec{z}+4+4i}\right) = \arg i = \frac{\pi}{2}$   
أي من أجل كل نقطة M تختلف عن  $\omega$ ،  
 $(\vec{MM'}, \vec{M\omega}) = \frac{\pi}{2}$

5. J' صورة J منتصف [OC] بالدوران الذي مركزه A و زاويته  $\frac{\pi}{2}$ .  
J تحقق  $JA' = JA$  و  $(\vec{JJ'}, \vec{JJ'}) = \frac{\pi}{2}$   
(يمكن تعيين الدوران الذي مركزه A و زاويته  $\frac{\pi}{2}$  ثم إيجاد لاحقة J').

و نعين لاحقة L و هي  $i - \frac{1}{2}$   
نعين لاحقة K حيث  $K = T(J)$  و  $\vec{z}' = \vec{z} - 1 + i$   
فنجد  $K(-\frac{1}{2})$ .

نعين لاحقة L حيث  $R_C(K) = L$   
و  $L(1 + \frac{i}{2})$  فنجد  $R_C: \vec{z}' = i\vec{z} + 1 + i$   
أي أن صورة A بالتحويل S هي L منتصف [BD]  
2. شعاع  $S = R_C \circ R_T \circ R_B: \vec{z}' = -\vec{z} + 1 + i$   
3. S هو تناظر مركزه منتصف [BC] أي النقطة O مركز المربع ABDC.

16. 1. S تشابه مباشر مركزه (1)، نسبته  $\sqrt{2}$  و زاويته  $\frac{3\pi}{4}$ .  
2. لاحقة G هي  $z = -\frac{i}{3}\vec{z} + 1 + \frac{i}{3}$  حيث  $\vec{z}$  لاحقة M.  
S' تشابه مباشر مركزه (1).  
لاحقة  $M_1$  حيث  $S'(M_1) = O$  هي  $1 - 3i$ .  
النقطة  $M''_1, M'_1, M_1$  في الشكل.



17. 1. S تشابه مباشر مركزه  $\omega(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i)$  و نسبته  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  و زاويته  $\frac{\pi}{4}$ .  
2. نتحقق أن  $\vec{B\omega} = \frac{3}{5} \vec{BA}$ .

إذن A, B,  $\omega$  على استقامة واحدة.  
3.  $(\vec{OB}, \vec{OC}) = \arg \frac{\vec{z}_C}{\vec{z}_B} = \frac{\pi}{4}$   
بما أن  $(\vec{OB}, \vec{OC}) = \frac{\pi}{4}$  وهي زاوية التشابه S فإن (OC) هو صورة (OB) وفق S.

$B' = O(0; 0)$  :  $O'(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i)$   
بما أن  $(\vec{OB}, \vec{OO'}) = \frac{\pi}{4}$  وهي زاوية التشابه S

أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

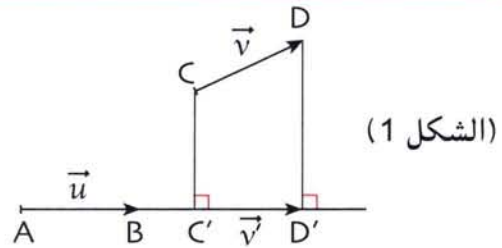
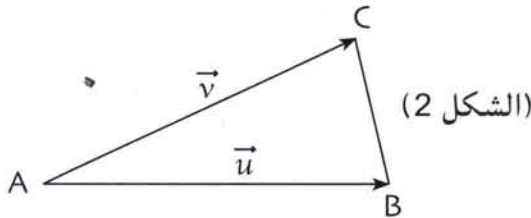
Hard\_equation

### 1 - الجداء السلمي في المستوي (مراجعة)

#### تعريف

$\vec{u}$ ،  $\vec{v}$  شعاعان غير منعدمين من المستوي،  $O$ ،  $A$ ،  $B$ ،  $C$  نقط مختلفة من نفس المستوي  
الجدول التالي يلخص تعاريف الجداء السلمي للشعاعين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  (أو للشعاعين  $\vec{OA}$  و  $\vec{OB}$ ).

|                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$ حيث $\vec{v}'$ المسقط للشعاع $\vec{v}$ على حامل $\vec{u}$ .<br>$\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{C'D'}$ حيث $C'$ ، $D'$ المسقطان العموديان للنقطتين $C$ ، $D$ على المستقيم $(AB)$ .<br>(الشكل 1) | $\vec{v} \cdot \vec{u} = \ \vec{u}\  \cdot \ \vec{v}\  \cos(\vec{u}; \vec{v})$ (الشكل 1)                                      |
| في معلم متعامد و متجانس $(\vec{i}; \vec{j})$ حيث $B(x'; y')$ : $A(x; y)$<br>$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = xx' + yy'$ يكون                                                                                                                                         | في أساس متعامد و متجانس $(\vec{i}; \vec{j})$ حيث $\vec{u}(x; y)$ و $\vec{v}(x'; y')$ يكون $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ |
| $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} [AB^2 + AC^2 - BC^2]$ (الشكل 2)                                                                                                                                                                                         | $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 - \ \vec{v} - \vec{u}\ ^2]$ (الشكل 2)                     |



**ملاحظة :** إذا كان أحد الشعاعين منعدمًا فإن الجداء السلمي لهما منعدم.

نقبل أن الشعاع  $\vec{O}$  عمودي على أي شعاع من المستوي.

**حالة خاصة :**  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متعامدان إذا وفقط إذا كان  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

#### المسافة بين نقطة ومستقيم في المستوي

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

المسافة بين النقطة  $A(x_0; y_0)$  والمستقيم  $(\Delta)$  المعرف بالمعادلة  $ax + by + c = 0$

حيث  $(a; b) \neq (0; 0)$  هي  $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

#### خاصية

$A$ ،  $B$ ،  $M$  نقط من المستوي حيث  $A \neq B$ .

$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$  إذا وفقط إذا كانت  $M$  تنتمي إلى الدائرة التي قطرها  $[AB]$ .



## II - الجداء السلمي في الفضاء

### تعريف

$\vec{v}$ ،  $\vec{u}$  شعاعان من الفضاء.  $A, B, C$  نقط حيث  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ ،  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ .  
الجداء السلمي للشعاعين  $\vec{v}$ ،  $\vec{u}$  هو الجداء السلمي للشعاعين  $\overrightarrow{AC}$ ،  $\overrightarrow{AB}$  في مستوي يشمل  
النقط  $A, B, C$ .

**ملاحظة :** كل خواص الجداء السلمي، المدروسة في الهندسة المستوية، تطبق على النقط و على  
الأشعة، من نفس المستوي، في الفضاء.

### خواص

$\vec{u}$ ،  $\vec{v}$ ،  $\vec{w}$  أشعة من الفضاء.

$$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2. \quad k \in \mathbb{R} \text{ حيث } (k \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k \vec{v}) = k (\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v}. \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{نتيجة :}$$

### العبارة التحليلية

$\vec{u}(x; y; z)$  و  $\vec{v}(x'; y'; z')$  شعاعان في الأساس المتعامد والمتجانس  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

### تعامد شعاعين

الشعاعان  $\vec{u}$ ،  $\vec{v}$  متعامدان إذا وفقط إذا كان  $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ .

$\vec{u} \cdot (x; y; z)$  و  $\vec{v} \cdot (x'; y'; z')$  شعاعان في الأساس المتعامد والمتجانس  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

$\vec{u}$ ،  $\vec{v}$  متعامدان إذا وفقط إذا كان  $xx' + yy' + zz' = 0$ .

**ملاحظة :** نقبل أن الشعاع  $\vec{0}$  عمودي على أي شعاع من الفضاء.

**معيار شعاع :**  $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  أساس متعامد ومتجانس.  $\vec{u}(x; y; z)$  شعاع.  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

### المسافة بين نقطتين

المسافة بين النقطتين  $A, B$  يرمز لها  $AB$  هي  $\|\overrightarrow{AB}\|$ . نكتب  $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$ .

$A(x; y; z)$ ،  $B(x'; y'; z')$  نقطتان من الفضاء و المنسوب إلى معلم متعامد

و متجانس  $(\vec{0}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . لدينا  $AB = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ .

### III - المستقيمات في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم  $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

#### 1. تمثيل وسيطي لمستقيم

لتكن النقطة  $A(x_0; y_0; z_0)$ ، والشعاع  $\vec{u}(a; b; c)$  غير المنعدم.

المستقيم (D) الذي يشمل A و يقبل  $\vec{u}$  شعاع توجيه له هو مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  حيث  $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$  مع  $\lambda$  عدد حقيقي.

هذه الجملة تسمى تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D). 
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$
 يكافئ  $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u}$

#### 2. معادلات ديكارتية لمستقيم

المستقيم (D) الذي يشمل النقطة  $A(x_0; y_0; z_0)$  ويقبل  $\vec{u}(a; b; c)$  شعاع توجيه له يعرف مثلاً

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \\ \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \end{cases}$$

بجملة المعادلتين

يعبر عادة عن هذه الجملة كما يلي :  $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$  حيث  $a, b, c$  غير منعدمة.

#### حالات خاصة

• إذا كان  $c = 0$  فإن (D) يعرف بالجملة 
$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \\ z = z_0 \end{cases}$$

• إذا كان  $b = 0$  فإن (D) يعرف بالجملة 
$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \frac{z - z_0}{c} \\ y = y_0 \end{cases}$$

• إذا كان  $a = 0$  فإن (D) يعرف بالجملة 
$$\begin{cases} \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \\ x = x_0 \end{cases}$$

### IV - المستويات في الفضاء

#### 1. تمثيل وسيطي لمستو

الفضاء منسوب إلى معلم  $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . لتكن النقطة  $A(x_0; y_0; z_0)$  والشعاعان غير المتوازيين

$\vec{u}(a; b; c)$ ،  $\vec{v}(a'; b'; c')$  المستوي (P) الذي يشمل النقطة A و يقبل  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  شعاعي توجيه له هو مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  حيث  $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$  مع  $\lambda$  و  $\mu$  عدداً حقيقيين.

هذه الجملة تسمى تمثيلا وسيطيا للمستوي (P). 
$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a + \mu a' \\ y = y_0 + \lambda b + \mu b' \\ z = z_0 + \lambda c + \mu c' \end{cases}$$
 يكافئ  $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$

## 2. معادلة ديكارتية لمستو

### الشعاع الناظمي لمستو

#### تعريف

(P) مستو في الفضاء.

نسمي شعاعا ناظميا للمستوي (P)، كل شعاع توجيهه لمستقيم عمودي على (P).

**خاصية مميزة:**  $\vec{n}$  شعاع غير منعدم، A نقطة من الفضاء.

مجموعة النقط M من الفضاء حيث  $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ ، هي المستوي (P) الذي يشمل النقطة A و يقبل  $\vec{n}$  شعاعا ناظميا له.

### معادلة ديكارتية لمستو

ينسب الفضاء إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

• لكل مستو (P) شعاعه الناظمي  $\vec{n}(a; b; c)$  معادلة ديكارتية من الشكل

$ax + by + cz + d = 0$  حيث  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$  و d عدد حقيقي.

• مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  حيث  $ax + by + cz + d = 0$  مع  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$

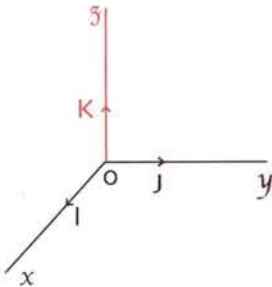
و  $d \in \mathbb{R}$  هي مستو حيث  $\vec{n}(a; b; c)$  شعاع ناظمي له.

**حالات خاصة:** نضع  $\vec{i} = \vec{OA}$ ،  $\vec{j} = \vec{OB}$  و  $\vec{k} = \vec{OC}$

$z = 0$  هي معادلة للمستوي  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  و  $\vec{k}$  شعاع ناظمي له.

$y = 0$  هي معادلة للمستوي  $(O; \vec{i}, \vec{k})$  و  $\vec{j}$  شعاع ناظمي له.

$x = 0$  هي معادلة للمستوي  $(O; \vec{j}, \vec{k})$  و  $\vec{i}$  شعاع ناظمي له.



## V - توازي مستويين

$ax + by + cz + d = 0$  معادلة للمستوي (P) و  $a'x + b'y + c'z + d' = 0$  معادلة للمستوي (P')

(P) و (P') متوازيان إذا وفقط إذا كان  $a' = \lambda a$  و  $b' = \lambda b$  و  $c' = \lambda c$  حيث  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

• إذا كان  $abc \neq 0$  فإن (P) يوازي (P') يكافئ  $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$ .

• إذا كان  $a' = \lambda a$  و  $b' = \lambda b$  و  $c' = \lambda c$  و  $d' = \lambda d$  فإن (P) و (P') متطابقان.

## VI - تعامد مستويين

$ax + by + cz + d = 0$  معادلة للمستوي (P) و  $a'x + b'y + c'z + d' = 0$  معادلة للمستوي (P')

(P) و (P') متعامدان يكافئ  $aa' + bb' + cc' = 0$ .



## VII - المسافة بين نقطة و مستو

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  معلم متعامد و متجانس للفضاء.

(P) مستو من الفضاء و  $ax + by + cz + d = 0$  معادلة له حيث  $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$  و

M  $(x_0; y_0; z_0)$  نقطة من الفضاء.

المسافة بين النقطة A و المستوي (P) هي  $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

## VIII - التمييز المرجحي

A, B, C نقط من الفضاء ليست على استقامة واحدة.

1. المستقيم (AB) هو مجموعة مراجح النقطتين A, B.

**حالة خاصة :** القطعة المستقيمة [AB] هي مجموعة مراجح النقطتين A, B مرفقتين بمعاملين لهما نفس الإشارة.

2. المستوي (ABC) هو مجموعة مراجح النقط A, B, C.

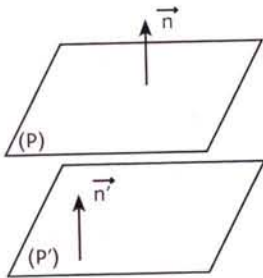
## IX - الأوضاع النسبية

1. الأوضاع النسبية لمستويين

(P) و (P') مستويان،  $\vec{n}$  و  $\vec{n'}$  شعاعان ناظميان لهما بهذا الترتيب.

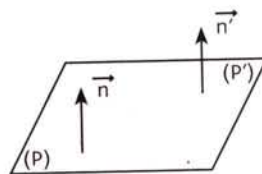
• إذا كان  $\vec{n}$  و  $\vec{n'}$  مرتبطين خطيا (متوازيين) فإن (P) و (P') متوازيان.

• إذا كان  $\vec{n}$  و  $\vec{n'}$  مستقلين خطيا (غير متوازيين) فإن (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم.



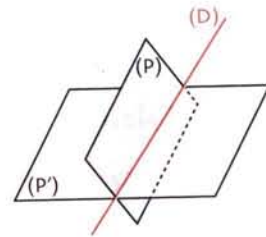
(P) و (P') متوازيان تماما

$$(P) \cap (P') = \emptyset$$



(P) و (P') منطبقان

$$(P) \cap (P') = (P) = (P')$$



(P) و (P') متقاطعان

$$(P) \cap (P') = (D)$$

## 2. الأوضاع النسبية لثلاث مستويات

$(P_1)$ ،  $(P_2)$  و  $(P_3)$  مستويات.

1. إذا كان  $(P_1)$  و  $(P_2)$  متوازيين تماما فإن تقاطع  $(P_1)$ ،  $(P_2)$  و  $(P_3)$  مجموعة خالية.

2. إذا كان  $(P_1)$  و  $(P_2)$  يتقاطعان وفق مستقيم  $(D)$  فتوجد ثلاثة حالات :

• إذا كان  $(P_3) \subset (D)$  فإن  $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = (D)$ .

• إذا كان  $(P_3) \cap (D) = \{I\}$  فإن  $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \{I\}$ .

• إذا كان  $(P_3) \cap (D) = \emptyset$  فإن  $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \emptyset$ .

## 3. الأوضاع النسبية لمستقيم ومستو

$(D)$  مستقيم،  $\vec{u}$  شعاع توجيه له.  $(P)$  مستوي و  $\vec{n}$  شعاع ناظمي له.

• إذا كان  $\vec{u}$  و  $\vec{n}$  متعامدين فإن  $(D)$  يوازي  $(P)$ .

• إذا كان  $\vec{u}$  و  $\vec{n}$  غير متعامدين فإن  $(D)$  يقطع  $(P)$ .

## 4. الأوضاع النسبية لمستقيمين

$(D)$ ،  $(D')$  مستقيمان في الفضاء.

• إذا كان  $(D)$  و  $(D')$  من نفس المستوي فإن دراسة أوضاعهما النسبية في الفضاء تعود إلى دراسة

أوضاعهما النسبية في هذا المستوي.

• إذا لم يوجد مستو يحتوي على  $(D)$  و  $(D')$  فإنهما غير متوازيين و غير متقاطعين.

## 1 حساب الجداء السلمي لشعاعين في المستوى

### تمرين

ABC مثلث قائم في C و متساوي الساقين حيث  $BC = a$ .  
احسب الجداء السلمي  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$

### حل

ABC مثلث قائم في C. إذن  $AB^2 = AC^2 + BC^2$  أي  $AB = a\sqrt{2}$ .

طريقة 1:  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cos \frac{\pi}{4} = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$  إذن  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = a^2$ .

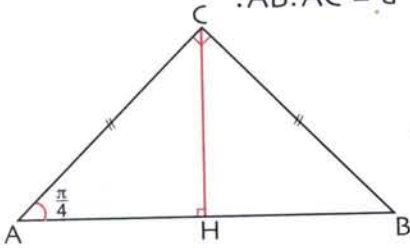
طريقة 2:  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = AB \cdot AH$ .

(  $\vec{AB}$  و  $\vec{AH}$  لهما نفس الإشارة و H المسقط العمودي للنقطة C

على (AB) و H منتصف [AB] ).

إذن  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \left(a\sqrt{2}\right) \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = a^2$  و بالتالي  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = a^2$ .

طريقة 3:  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = a^2$  إذن  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} [AB^2 + AC^2 - BC^2] = \frac{1}{2} [2a^2 + a^2 - a^2] = a^2$ .



## 2 حساب المسافة بين نقطة ومستقيم من المستوى

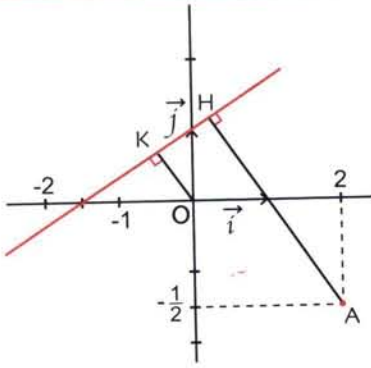
### تمرين

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

احسب المسافة بين المبدأ O و المستقيم (D).

الذي معادلته  $2x - 3y + 3 = 0$ .

احسب المسافة بين النقطة  $A\left(2; -\frac{3}{2}\right)$  و المستقيم (D).



### حل

إذا كان K المسقط العمودي للنقطة O على (D) فإن المسافة بين O و (D) هي OK.

$$\text{لدينا } OK = \frac{|2(0) - 3(0) + 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

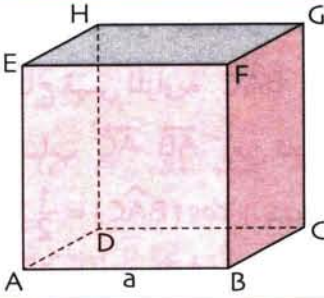
إذا كان H المسقط العمودي للنقطة A على (D) فإن  $AH = \frac{|2(2) - 3(-\frac{3}{2}) + 3|}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$

$$\text{إذن } AH = \frac{11,5\sqrt{13}}{13}$$



### 3 حساب الجداء السلمي لشعاعين في الفضاء

#### تمرين 1



نفرض المكعب ABCDEFGH المقابل حيث  $AB = a$ .

احسب الجداءات السلمية التالية :

$$\vec{FG} \cdot \vec{BH}, \vec{FC} \cdot \vec{AD}, \vec{CA} \cdot \vec{CB}, \vec{BC} \cdot \vec{DH}, \vec{AB} \cdot \vec{DH}$$

#### حل

((DH)) عمودي على كل من ((DA)) و ((DC))

فهو عمودي على المستوي ((ADC)) و بالتالي

((AB))  $\perp$  ((DH)) و بالمثل ((BC))  $\perp$  ((DH))

$$(\vec{AD} = \vec{BC})$$

$$(\vec{FC}^2 = \vec{FB}^2 + \vec{BC}^2)$$

$$(\vec{FG} = \vec{BC})$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{DH} = 0 \text{ إذن } (AB) \perp (DH).$$

$$\vec{BC} \cdot \vec{DH} = 0 \text{ إذن } (BC) \perp (DH).$$

$$\begin{aligned} \vec{CA} \cdot \vec{CB} &= CA \cdot CB \cos(\widehat{ACB}). \\ &= a^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{FC} \cdot \vec{AD} &= \vec{FC} \cdot \vec{BC} = FC \cdot BC \cos \frac{\pi}{4}. \\ &= (a\sqrt{2}) a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{FG} \cdot \vec{BH} &= \vec{BC} \cdot \vec{BH} = \vec{BC} \cdot (\vec{BC} + \vec{CH}) \\ &= \vec{BC}^2 + \vec{BC} \cdot \vec{CH} \\ &= \vec{BC}^2 = a^2 \end{aligned}$$

((BC)) عمودي على ((CD)) و ((CG)) فهو عمودي على المستوي ((DCG)) و بالتالي عمودي على ((CH)).

#### تمرين 2

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

نعتبر النقط  $B(-\sqrt{2}-1; 0, -2)$  :  $A(-1; -1, -3)$

$D(-\frac{\sqrt{2}}{2}-1; -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$  :  $C(-\sqrt{2}-1; -2, -2)$

احسب المسافتين  $AC, AB$ .

احسب الجداء السلمي للشعاعين  $\vec{AC}, \vec{AB}$  و للشعاعين  $\vec{CD}, \vec{AB}$ .

استنتج قيسا للزاوية  $\widehat{BAC}$  ثم طبيعة المثلث  $ABC$ .

#### حل

$$\vec{CD} \left( \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2} \right) : \vec{AC} (-\sqrt{2}; -1; 1) : \vec{AB} (-\sqrt{2}; 1; 1) \text{ لدينا}$$

$$AC = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-1)^2 + 1} = 2 \text{ و } AB = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + 1 + 1} = 2.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-\sqrt{2})(-\sqrt{2}) + (1)(-1) + (1)(1) = 2.$$

و النتيجة الأخيرة تثبت أن (AB) و (CD) متعامدان.

استنتاج قيس للزاوية  $\widehat{BAC}$  : لدينا من جهة  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$

وبحساب  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos(\widehat{BAC})$  (من تعريف الجداء السلمي) نجد :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2} \quad \text{إذن} \quad \cos(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2} \quad \text{ينتج أن} \quad \frac{\pi}{3} \quad \text{قيس للزاوية} \quad \widehat{BAC}.$$

وبالتالي المثلث ABC متقايس الأضلاع (AB = AC و  $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ ).

#### 4 تعيين تمثيل وسيطي لمستقيم وتوظيفه

##### تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل النقطتين

$$A(1; -2; -3) \quad \text{و} \quad B(-2; 2; 0).$$

هل تنتمي النقطة  $C(1; -3; -2)$  إلى المستقيم (D)؟ هل تنتمي النقطة  $E(-2; -2; 0)$  إلى (D)؟

##### حل

$$t \in \mathbb{R} \quad \text{حيث} \quad \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 4t \\ z = -3 + 3t \end{cases} \quad \text{إذن} \quad \overrightarrow{AB}(-3; 4; 3) \quad \text{هو شعاع توجيه للمستقيم (D)} \\ \text{و هو تمثيل وسيطي للمستقيم (D).}$$

$$\begin{cases} 1 - 3t = 1 \\ -2 + 4t = -3 \\ -3 + 3t = -2 \end{cases} \quad \text{C} \in (D) \quad \text{إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي} \quad t \quad \text{يحقق}$$

$$\text{نلاحظ أنه لا توجد قيمة للعدد} \quad t \quad \text{تحقق هذه الجملة. إذن} \quad C \notin (D) \quad \begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{1}{4} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{أو}$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} -2 = 1 - 3t \\ 2 = -2 + 4t \\ 0 = -3 + 3t \end{cases} \quad \text{E} \in (D) \quad \text{إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي} \quad t \quad \text{يحقق الجملة} \\ \text{إذن} \quad t = 1 \quad \text{و بالتالي} \quad E \in (D).$$

#### 5 تعيين معادلات ديكارتية لمستقيم في الفضاء

##### تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

حدد المجموعة E من النقط  $M(x; y; z)$  المعرفة بالتمثيل الوسيطي (S) التالي :

$$(S) \quad \begin{cases} x = -3 + 2k \\ y = -1 - k \\ z = 1 - 3k \end{cases} \quad \text{حيث} \quad k \in \mathbb{R} \quad \dots\dots\dots$$

أكتب معادلات ديكارتية لها.

حل

• لتكن النقطة  $A(-3; -1; 1)$  من  $E$  المحصل عليها من أجل  $k = 0$  ، النقطة  $M(x; y; z)$  من  $E$  من أجل عدد حقيقي  $k$  كيفي.

الجملة  $(S)$  تكافئ  $(S')$  ...  $\begin{cases} x+3=2k \\ y+1=-k \\ z-1=-3k \end{cases}$  أو المعادلة  $\vec{AM} = k\vec{u}$  حيث  $\vec{u}(2; -1; -3)$ .

إذن المجموعة  $E$  هي المستقيم الذي يشمل  $A(-3; -1; 1)$  و يقبل  $\vec{u}(2; -1; -3)$  شعاع توجيه له.  
• كتابة معادلات ديكارتية للمستقيم  $E$ . الجملة  $(S')$  تكافئ  $\frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$  وهي معادلات للمستقيم  $E$  الذي يشمل  $A$  و يقبل  $\vec{u}$  شعاع توجيه له.

## 6 تعيين تمثيل وسيطي لمستوى الفضاء

### تمرين 1

• الفضاء منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستوى  $(P)$  الذي يشمل النقطة  $A(-1; -2; 1)$  و يقبل  $\vec{u}(-2; \frac{1}{2}; 3)$  و  $\vec{v}(1; -2; \frac{1}{2})$  شعاعين توجيهيين له.

حل

المستوى  $(P)$  هو مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  حيث  $\vec{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$  ؛  $\lambda$  و  $\mu$  عدنان حقيقيان.  
لدينا  $A(-1; -2; 1)$  ؛  $\vec{u}(-2; \frac{1}{2}; 3)$  ؛  $\vec{v}(1; -2; \frac{1}{2})$ .

إذن الجملة  $\begin{cases} x = -1 - 2\lambda + \mu \\ y = -2 + \frac{1}{2}\lambda - 2\mu \\ z = 1 + 3\lambda + \frac{1}{2}\mu \end{cases}$  هي تمثيل وسيطي للمستوى  $(P)$ .

### تمرين 2

• الفضاء منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .  
• عيّن تمثيلاً وسيطياً للمستوى  $(P)$  الذي يشمل النقط  $A(2; 0; 1)$  ،  $B(2; 1; -1)$  و  $C(1; 3; 0)$ .  
• هل تنتمي النقطة  $O$  مبدأ المعلم إلى  $(P)$ ؟ هل تنتمي النقطة  $D(1; 2; 2)$  إلى  $(P)$ ؟

حل

$\vec{AB}(0; 1; -2)$  و  $\vec{AC}(-1; 3; -1)$  شعاعان. لا يوجد عدد حقيقي  $k$  يحقق  $\vec{AC} = \lambda\vec{AB}$ .  
إذن  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$  غير متوازيين و هما شعاعان توجيهيان للمستوى  $(P)$ .

ينتج أن  $\begin{cases} x = 2 + 0\lambda - \mu \\ y = 0 + \lambda + 3\mu \\ z = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases}$  الجملة  $\begin{cases} x = 2 - \mu \\ y = \lambda + 3\mu \\ z = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases}$  هي تمثيل وسيطي للمستوى  $(P)$ .

الذي يشمل النقط  $A, B, C$ .



$$\begin{cases} 0 = 2 - \mu \\ 0 = \lambda + 3\mu \end{cases} \text{ تقبل حلا وحيدا، وحل الجملة } \begin{cases} 0 = 2 - \mu \\ 0 = \lambda + 3\mu \\ 0 = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases} \text{ يعني أن الجملة (S) ...}$$

هو  $(\lambda; \mu) = (-6; 2)$ . هذا الحل لا يحقق المعادلة  $1 - 2\lambda - \mu = 0$  (لأن  $1 - 2(-6) - 2 \neq 0$ ).

إذن الجملة (S) لا تقبل حلا وبالتالي النقطة O لا تنتمي إلى (P).

$$\begin{cases} 1 = 2 - \mu \\ 2 = \lambda + 3\mu \end{cases} \text{ تقبل حلا وحيدا، وحل الجملة } \begin{cases} 1 = 2 - \mu \\ 2 = \lambda + 3\mu \\ 2 = 1 - 2\lambda - \mu \end{cases} \text{ يعني أن الجملة } D \in (P).$$

هو  $(\lambda; \mu) = (-1; 1)$  وهذا الحل يحقق المعادلة  $2 = 1 - 2\lambda - \mu$  أي  $2 = 1 - 2(-1) - 1 = 2$

إذن النقطة D تنتمي إلى (P).

## 7 تعيين تمثيل وسيطي لمستو في الفضاء

### تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

نعتبر النقط  $A(-2; 1; -1)$ ,  $B(1; 0; -1)$ ,  $C(-2; 4; 1)$ .

1. عيّن معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A، و يقبل  $\vec{BC}$  شعاعا ناظميا.

2. أثبت أن النقط A، B، C تعيّن مستويا. عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC).

### حل

1.  $\vec{BC}(-3; 4; 2)$  شعاع ناظمي للمستوي (P) يعني  $-3x + 4y + 2z + d = 0$  حيث  $d \in \mathbb{R}$ .

(P) يشمل النقطة A يعني  $-3(-2) + 4(1) + 2(-1) + d = 0$  أي  $d = -8$

إذن  $-3x + 4y + 2z - 8 = 0$  هي معادلة ديكارتية للمستوي (P).

2. النقط A، B، C تعيّن مستويا إذا وفقط إذا كان  $\vec{BA}$  و  $\vec{BC}$  غير متوازيين.

لدينا  $\vec{BA}(-3; 1; 0)$  و  $\vec{BC}(-3; 4; 2)$ . لا يوجد عدد حقيقي  $\alpha$  من أجله يكون  $\vec{BC} = \alpha \vec{BA}$

وبالتالي الشعاعان  $\vec{BA}$  و  $\vec{BC}$  غير متوازيين. إذن النقط A، B، C تعيّن مستويا.

• تعيين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC). إذا كان  $\vec{n}(a; b; c)$  شعاعا ناظميا للمستوي

(ABC) فإن  $\vec{n}$  عمودي على كل مستقيم من المستوي (ABC). وبالتالي على (AB) و (BC)، إذن

$\vec{n}$  عمودي على كل من الشعاعين  $\vec{BA}$  و  $\vec{BC}$ .

$$\begin{cases} b = 3a \\ c = -\frac{9}{2}a \\ a \neq 0 \end{cases} \text{ ينتج أن } \begin{cases} -3a + b + 0c = 0 \\ -3a + 3b + 2c = 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{BA} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{BC} = 0 \end{cases}$$

كل شعاع إحداثياته  $(a; 3a; -\frac{9}{2}a)$  هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC).

و باختيار قيمة للعدد  $a$  مثل  $a = 2$  يكون  $\vec{n} (2 ; 6 ; -9)$  شعاعان ناظميا للمستوي (ABC).  
و تكون معادلة المستوي (ABC) هي  $2x + 6y - 9z + e = 0$  حيث  $e \in \mathbb{R}$ .  
بما أن B نقطة من هذا المستوي فإن  $2(1) + 6(0) - 9(+1) + e = 0$   
و بالتالي  $e = -11$ . ينتج أن  $2x + 6y - 9z - 11 = 0$  هي معادلة ديكرتية للمستوي (ABC).

## 8 دراسة تقاطع مستقيمين في الفضاء

### تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

$(\Delta_1) ; (\Delta_2) ; (\Delta_3)$  مستقيمات، تمثيلاتها الوسيطة على التوالي هي :

$$\begin{cases} x = 7 - 7r \\ y = 3r \\ z = -2r \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = 2 - 5q \\ y = 1 + q \\ z = -3 - 4q \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = -1 + p \\ y = -4 - 3p \\ z = -5 + p \end{cases}$$

الحيث  $r, q, p$  أعداد حقيقية.

ادرس تقاطع  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  ثم  $(\Delta_2)$  و  $(\Delta_3)$ .

### حل

1.  $\vec{u}_1 (1 ; -3 ; 1)$  شعاع توجيه ل  $(\Delta_1)$  و  $\vec{u}_2 (-5 ; 1 ; -4)$  شعاع توجيه ل  $(\Delta_2)$ .

نلاحظ أن  $\vec{u}_1$  و  $\vec{u}_2$  غير متوازيين (لا يوجد عدد حقيقي  $\alpha$  بحيث  $\vec{u}_2 = \alpha \vec{u}_1$ )

إذن  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  غير متوازيين. فهما متقاطعان أو غير مستويين (لا يوجد مستوي يحتوي عليهما).

للتعرف على وضعية المستقيمين  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  نحل الجملة

$$\begin{cases} p = -2 \\ q = 1 \end{cases} \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} p + 5q = 3 \\ 3p + q = -5 \\ p + 4q = 2 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} -1 + p = 2 - 5q \\ -4 - 3p = 1 + q \\ -5 + p = -3 - 4q \end{cases}$$

من أجل  $p = -2$  نجد النقطة من  $(\Delta_1)$  ذات الإحداثيات  $(-3 ; 2 ; -7)$

من أجل  $q = 1$  نجد النقطة من  $(\Delta_2)$  ذات الإحداثيات  $(-3 ; 2 ; -7)$  و هي نفس النقطة من  $(\Delta_1)$ .

إذن  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$  يشتركان في النقطة ذات الإحداثيات  $(-3 ; 2 ; -7)$ .

2.  $\vec{u}_3 (-7 ; 3 ; -2)$  شعاع توجيه للمستقيم  $(\Delta_3)$ .  $\vec{u}_2$  و  $\vec{u}_3$  غير متوازيين.

إذن  $(\Delta_2)$  و  $(\Delta_3)$  غير متوازيين، فهما متقاطعان أو غير مستويين. للتعرف على وضعية المستقيمين

$$\begin{cases} 5q - 7r = 5 \\ q - 3r = -1 \\ 4q - 2r = -3 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} 2 - 5q = 7 - 7r \\ 1 + q = 3r \\ -3 - 4q = -2r \end{cases} \quad \text{نحل الجملة التالية :}$$

هذه الجملة لا تقبل حلا (لأن حل الجملة  $\begin{cases} 5q - 7r = -5 \\ q - 3r = -1 \end{cases}$  هو  $(-1 ; 0)$  و لا يحقق المعادلة  $4q - 2r = -3$ )

إذن  $(\Delta_2)$  و  $(\Delta_3)$  غير متقاطعين و غير متوازيين و بالتالي فهما غير مستويين.

9 دراسة تقاطع مستقيم و مستوي في الفضاء

تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

(P) المستوي المعرف بالمعادلة  $2x + 3y - z - 1 = 0$

و  $(D_1)$  و  $(D_2)$  المستقيمان المعرفان على الترتيب بالتمثيلين الوسيطيين  $\begin{cases} x = -1 + s \\ y = 1 - s \\ z = 1 - s \end{cases}$  و  $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$

حيث  $s$  و  $t$  عدنان حقيقيان.

ادرس تقاطع كل من المستوي (P) و المستقيمين  $(D_1)$  و  $(D_2)$ .

حل

$\vec{u}(2; 3; -1)$  شعاع ناظمي للمستوي (P)،  $\vec{v}_1(3; -2; 1)$  شعاع توجيه للمستقيم  $(D_1)$ ،  $\vec{v}_2(1; -1; -1)$

شعاع توجيه للمستقيم  $(D_2)$ .

• الشعاعان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}_1$  غير متعامدين ( لأن  $\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 2(3) + 3(-2) + (-1)(1) = -1 \neq 0$  )

إذن (P) و  $(D_1)$  غير متوازيين. فهما متقاطعان، و تعين نقطة تقاطعهما كالآتي:

لدينا  $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 2t \\ z = 3 + t \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$  ومنه  $2(2 + 3t) + 3(1 - 2t) - (3 + t) = 1$  أو  $4 - t = 1$  إذن  $t = 3$

إحداثيات نقطة تقاطع (P) و  $(D_1)$  من أجل  $t = 3$  هي  $(11; -5; 6)$ .

• الشعاعان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}_2$  متعامدان ( لأن  $\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 2(1) + 3(-1) + (-1)(-1) = 0$  )

إذن (P) و  $(D_2)$  متوازيان.

10 تقاطع مستويين

تمرين

$(P_1)$ ،  $(P_2)$  و  $(P_3)$  مستويات معادلاتها على الترتيب

$3x - 2y - z + 1 = 0$ ،  $x - y + 2z - 5 = 0$  و  $3x - 3y + 6z + 1 = 0$

ادرس تقاطع المستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$  ثم تقاطع المستويين  $(P_2)$  و  $(P_3)$ .

حل

• دراسة تقاطع المستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$ : لدينا  $\vec{n}_1(3; -2; -1)$  و  $\vec{n}_2(1; -1; 2)$  شعاعان ناظميان

للمستويين  $(P_1)$  و  $(P_2)$  على الترتيب. نلاحظ أن  $\vec{n}_1$  و  $\vec{n}_2$  غير متوازيين.

إذن  $(P_1)$  و  $(P_2)$  غير متوازيين. فهما متقاطعان وفق مستقيم  $(\Delta)$ .

• تعيين تمثيل وسيطي للمستقيم  $(\Delta)$

لتعيين تمثيل وسيطي للمستقيم  $(\Delta)$  نعتبر عن  $x$  و  $y$  مثلاً بدلالة  $z$  حيث يكون  $z$  هو الوسيط.



$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \\ x = -\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right) = 5 - 2t \\ z = t \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} 3x - 2y = -1 + t \\ x - y = 5 - 2t \\ z = t \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} 3x - 2y - z + 1 = 0 \\ x - y + 2z - 5 = 0 \end{cases} \text{ لدينا}$$

بعد الاختصار نجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(\Delta)$  و هو  $\begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = -16 + 7t \\ z = t \end{cases}$  حيث  $t \in \mathbb{R}$ .

• تقاطع  $(P_2)$  و  $(P_3)$  : لدينا  $\vec{n}_2(1; -1; 2)$  و  $\vec{n}_3(3; -3; 6)$  شعاعان ناظميان للمستوي  $(P_2)$  و  $(P_3)$ .  
نلاحظ أن  $\vec{n}_3 = 3\vec{n}_2$ . إذن  $\vec{n}_3$  و  $\vec{n}_2$  متوازيان. نختار نقطة من  $(P_2)$  مثل  $A(-5; 0; 0)$ .  
إحداثيات  $A$  لا تحقق معادلة  $(P_3)$  أي أن  $A \notin (P_3)$ . إذن  $(P_2)$  و  $(P_3)$  متوازيان تماما (أي غير منطبقين).

## 11 دراسة تقاطع ثلاث مستويات

### تمرين 1

$(P_1)$ ،  $(P_2)$  و  $(P_3)$  مستويات ذات المعادلات  
 $x + y + z = 4$  ،  $-x + y - z - 2 = 0$  و  $3x + 4y + 3z - 15 = 0$  على الترتيب.  
أدرس تقاطع هذه المستويات.

حل

لتعيين تقاطع المستويات  $(P_1)$ ،  $(P_2)$ ،  $(P_3)$  نحل الجملة (S) .....  
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -x + y - 2z = 3 \\ 3x + 4y + 3z = 15 \end{cases}$$
  
الجملة (S) تكافئ  $\begin{cases} x + 3y = 11 \\ y = 3 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$  . إذن  $(x; y; z) = (2; 3; -1)$

الجملة (S) تقبل حلا وحيدا هو  $(2; 3; -1)$ . نستنتج أن المستويات  $(P_1)$ ،  $(P_2)$  و  $(P_3)$  تشترك في نقطة واحدة هي  $A(2; 3; -1)$ .

### تمرين 2

$(P_1)$ ،  $(P_2)$  و  $(P_3)$  مستويات ذات المعادلات  $x + 2y - z - 3 = 0$  ،  $2x - y + 3z - 4 = 0$  و  $x - 3y + 4z - 2 = 0$  على الترتيب. • ادرس تقاطع هذه المستويات.

حل

لتعيين تقاطع المستويات  $(P_1)$ ،  $(P_2)$  و  $(P_3)$  نحل الجملة (S) .....  
$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ x - 3y + 4z = 2 \end{cases}$$
  
الجملة (S) تكافئ  $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 5x + 5y = 13 \\ 5x + 5y = 14 \end{cases}$

هذه الجملة ليس لها حل. إذن تقاطع المستويات الثلاث هو مجموعة خالية.

## 12 توظيف الجداء السلمي لتعيين مجموعات نقط في الفضاء

### تمرين 1

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .  
 A نقطة إحداثياتها  $(-1; 3; 2)$ ،  $\vec{u}$  شعاع إحداثياته  $(2; 3; -1)$ .  
 عين مجموعة النقط M من الفضاء حيث  $\vec{AM} \cdot \vec{u} = -10$ .

### حل

نفرض  $M(x; y; z)$  لدينا  $\vec{AM}(x-2; y-3; z+1)$

و حسب التعريف التحليلي للجداء السلمي لشعاعين يكون

$$\vec{AM} \cdot \vec{u} = (-1)(x-2) + 3(y-3) + 2(z+1)$$

$$\vec{AM} \cdot \vec{u} = -10 \text{ يكافئ } -x + 3y + 2z + 5 = 0$$

إذن مجموعة النقط M من الفضاء حيث  $\vec{AM} \cdot \vec{u} = -10$

هو المستوي (P) المعرف بالمعادلة  $x - 3y - 2z - 5 = 0$

المستوي (P) يشمل نقطة مثل  $B(0; 0; -\frac{5}{2})$  و يقبل  $\vec{u}(-1; 3; 2)$  شعاعا ناظميا له.

### تمرين 2

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

A(1; -1; 4)، B(-1; 2; -3) نقطتان من الفضاء.

1. عين مجموعة النقط M بحيث يكون  $3MA^2 - 2MB^2 = 540$

2. عين مجموعة النقط M بحيث يكون  $MA^2 - MB^2 = 10$

### حل

M نقطة من الفضاء احداثياتها  $(x; y; z)$

$$\vec{MA}(x-1; y+1; z-4) : \vec{MB}(x+1; y-2; z+3)$$

$$MA^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 8z + 18$$

$$MB^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z + 14$$

$$3MA^2 - 2MB^2 = 540 \text{ يكافئ } x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 14y - 36z + 26 = 540$$

$$\text{أي أن } (x-5)^2 + (y+7)^2 + (z-18)^2 + 424 = 540$$

$$\text{إذن } (x-5)^2 + (y+7)^2 + (z-18)^2 = 4^2$$

إذن مجموعة النقط M من الفضاء حيث  $3MA^2 - 2MB^2 = 540$

هي الكرة التي مركزها  $\omega(5; -7; 18)$  و نصف قطرها 4.

2.  $MA^2 - MB^2 = 10$  يعني  $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-4)^2 - (x+1)^2 - (y-2)^2 - (z+3)^2 = 10$   
 أي أن  $-4x + 6y - 14z + 4 = 10$  أو  $-2x + 3y - 7z - 3 = 0$   
 وهي معادلة لمستوى (P) يشمل نقطة مثل  $C(0; 1; 0)$  و يقبل  $\vec{u}(-2; 3; -7)$  شعاعا ناظما له.

### 13 كتابة معادلة ديكارتية لمستوى علم تمثيل وسيطي له

#### تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

(P) مستوى معرف بتمثيل وسيطي له و هو  $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \gamma \\ y = -1 + 3\lambda + 2\gamma \\ z = 2 + \lambda + 3\gamma \end{cases}$  حيث  $\lambda, \gamma$  عدنان حقيقيان.

اكتب معادلة ديكارتية للمستوى (P).

#### حل

$$\begin{cases} 2\lambda + \gamma = x - 1 \\ 3\lambda + 2\gamma = y + 1 \\ \lambda + 3\gamma = z - 2 \end{cases} \quad \text{تكافئ} \quad \begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \gamma \\ y = -1 + 3\lambda + 2\gamma \\ z = 2 + \lambda + 3\gamma \end{cases}$$

نحل الجملة الاخيرة ذات المجهولين  $\lambda, \gamma$  بإيجاد حل لجملة معادلتين مثل  $\begin{cases} 2\lambda + \gamma = x - 1 \\ 3\lambda + 2\gamma = y + 1 \end{cases}$

فيكون  $(\lambda; \gamma) = (2x - y - 3; -3x + 2y + 5)$  ، ثم نعوض  $\lambda$  و  $\gamma$  في المعادلة الباقية و هي

$$2x - y - 3 + 3(-3x + 2y + 5) = z - 2 \quad \text{أي} \quad \lambda + 3\gamma = z - 2$$

### 14 كتابة تمثيل وسيطي لمستوى علمت معادلة ديكارتية له

#### تمرين

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  ؛ (P) مستوى معرف بالمعادلة  $2x + y - z + 3 = 0$ . عين تمثيلا وسيطيا للمستوى (P).

#### حل

يعرف المستوى بثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة. نختار ثلاثة نقط مثل  $A(-\frac{3}{2}; 0; 0)$  ،

$B(0; -3; 0)$  ،  $C(0; 0; 3)$  تنتمي إلى المستوى (P). إذن (P) يشمل A و يقبل  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$

شعاعي توجيه له. لدينا  $\vec{AB}(\frac{3}{2}; -3; 0)$  ،  $\vec{AC}(\frac{3}{2}; 0; 3)$  إذن يوجد عدنان حقيقيان  $\lambda, \gamma$

$$\text{بحيث} \quad \begin{cases} x = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{2}\gamma \\ y = -3\lambda \\ z = 3\gamma \end{cases} \quad \text{و هذه الجملة هي تمثيل وسيطي للمستوى (P).}$$



15 كتابة جملة معادلتين ديكارتيتين لمستقيم علم تمثيل وسيطي له

## تمرين

(D) مستقيم معرف بتمثيل وسيطي له و هو

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad \text{حيث } t \text{ عدد حقيقي}$$

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

اكتب جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D).

## حل

نعين جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D) بالتعبير عن  $t$  بدلالة  $x, y, z$  في كل معادلة

من جملة التمثيل الوسيطي، و نجد  $t = \frac{x+2}{3} = \frac{-y+1}{1} = \frac{z-3}{2}$

إذن  $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2}$  هي جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم (D).

مسألة 1

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  حيث  $\vec{i} = \vec{OI}$ ,  $\vec{j} = \vec{OJ}$  و  $\vec{k} = \vec{OK}$ .  
 $A(3; 0; 10)$ ,  $B(0; 0; 15)$  و  $C(0; 20; 0)$  نقط من الفضاء.

1. عيّن تمثيلاً وسيطاً للمستقيم  $(AB)$ .

2. اثبت أن  $(AB)$  يقطع محور الفواصل في نقطة  $E$  يطلب تحديد إحداثياتها.

3. تحقق أن النقط  $A, B, C$  ليست على استقامة واحدة.

ب) ليكن  $H$  المسقط العمودي للنقطة  $O$  على المستقيم  $(BC)$ .

1. اثبت أن المستقيم  $(BC)$  عمودي على المستوي  $(OEH)$ . استنتج أن  $[EH]$  هو إرتفاع المثلث  $EBC$ .

2. عيّن معادلة ديكارتية للمستوي  $(OEH)$ .

3. عيّن تمثيلاً وسيطاً للمستوي  $(ABC)$  ثم معادلة ديكارتية له.

4. عيّن تقاطع المستويات  $(OJK)$  و  $(OEH)$  و  $(ABC)$ .

5. احسب المسافة  $OH$  ثم استنتج المسافة  $EH$ .

. تحقق أن نقطة تقاطع المستويات  $(OJK)$  و  $(OEH)$  و  $(ABC)$  هي النقطة  $H$ .

6. احسب المسافة بين النقطة  $O$  و المستوي  $(ABC)$ .

حل

أ) 1. المستقيم  $(AB)$  يشمل النقطة  $A$  و يقبل  $\vec{AB}$  شعاعاً توجيهياً له.

إذن يوجد عدد حقيقي  $k$  حيث  $\vec{AM} = k \vec{AB}$  لدينا  $\vec{AB}(-3; 0; -5)$  و  $\vec{AM}(x-3; y; z-10)$

$$\vec{AM} = k \vec{AB} \text{ يكافئ } \begin{cases} x-3 = -3k \\ y-0 = 0k \\ z-10 = 5k \end{cases} \text{ الجملة } \begin{cases} x = 3 - 3k \\ y = 0 \\ z = 10 + 5k \end{cases} \text{ هي تمثيل وسيطي للمستقيم } (AB).$$

$$\begin{cases} x = 3 - 3k \\ y = 0 \\ 10 + 5k = 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = 3 - 3k \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ يعني } E \text{ نقطة } (0; \vec{i})$$

من أجل  $k = -2$  نجد نقطة تقاطع  $(AB)$  و  $(O; \vec{i})$  وهي  $E(9; 0; 0)$ .

3. النقط  $A, B, C$  ليست على استقامة واحدة لأنه لا يوجد عدد حقيقي  $\lambda$  يحقق  $\vec{AC} = \lambda \vec{AB}$

$$(\vec{AB}(-3; 0; 5) \text{ و } \vec{AC}(-3; 20; -10) \text{ و } -3 = 1 \times (-3) \text{ و } -10 \neq 1 \times 5)$$

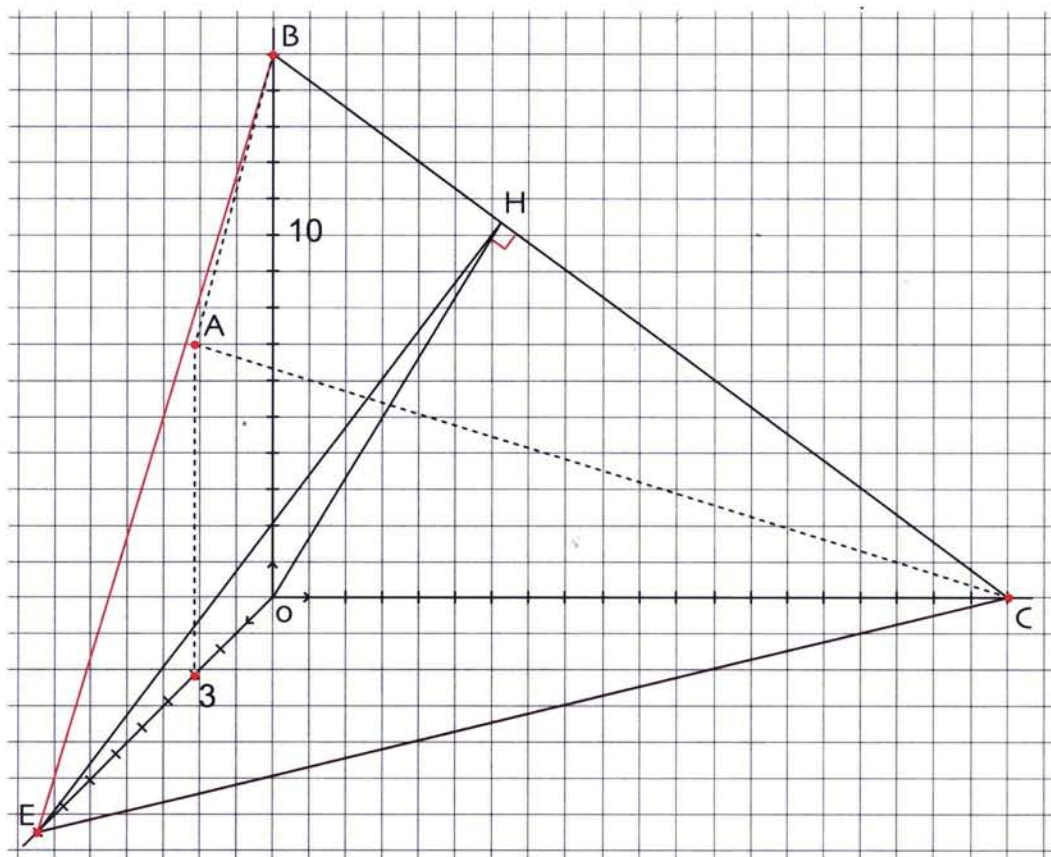
ب) 1. لإثبات أن  $(BC)$  عمودي على المستوي  $(OEH)$  يكفي البرهان أن  $(BC)$  عمودي على

مستقيمين متقاطعين من المستوي  $(OEH)$ .

لدينا  $(OE)$  عمودي على المستوي  $(OBC)$  فهو عمودي على المستقيم  $(BC)$  (أو  $(BC)$  عمودي

على  $(OE)$ ). و لدينا  $(BC)$  عمودي على  $(OH)$  إذن  $(BC)$  عمودي على  $(OE)$  و  $(OH)$  فهو

عمودي على المستوي  $(OEH)$ .



نستنتج أن (BC) عمودي على كل مستقيم من المستوي (OEH) فهو عمودي على (EH).  
إذن [EH] هو ارتفاع المثلث EBC.

**ملاحظة :** يمكن أن نبرهن أن (BC) عمودي على (OE) بحساب الجداء السلمي للشعاعين

$\vec{BC} \cdot \vec{OE} = 0(9) + 20(0) - 15(0) = 0$  و  $\vec{OE}$  و  $\vec{BC}$  هو

2. تعيين معادلة ديكارتية للمستوى (OEH).

بما أن  $(OEH) \perp (BC)$  إذن  $\overline{BC}$  شعاع ناظمي للمستوي  $(OEH)$ . وبالتالي فللمستوي  $(OEH)$  معادلة من الشكل  $0.x + 20y - 15z + d = 0$  حيث  $d$  عدد حقيقي. بما أن  $O$  نقطة من المستوي  $(OEH)$  إذن  $4y - 3z = 0$  هي معادلة للمستوي  $(OEH)$ .

3. تعيين تمثيل وسيطي للمستوى (ABC).

المستوى (ABC) معرف بنقطة مثل B وشعاعين توجيهيين  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$ .

لتكن نقطة  $M(x; y; z)$  من المستوى  $(ABC)$ . إذن  $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$  حيث  $\lambda$  و  $\mu$  عددان حقيقيان.

لدينا  $\vec{BM} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$  . يكافئ  $\cdot$  إذن الجملة  $\begin{cases} x - 0 = -3\lambda - 3\mu \\ y - 0 = 0\lambda + 20\mu \\ z - 15 = 5\lambda - 10\mu \end{cases}$

هي تمثيل وسيطي للمستوى (ABC).



. كتابة معادلة ديكارتية للمستوي ABC :

$$\lambda = -\frac{x}{3} - \frac{y}{20} \text{ و } \mu = \frac{y}{20} \text{ فنجد } \begin{cases} -3\lambda - 3\mu = x \\ 20\mu = y \end{cases} \text{ نحل الجملة}$$

ثم نعوض  $\lambda$  و  $\mu$  في المعادلة  $5\lambda - 10\mu = z - 15$  فنجد المعادلة  $20x + 9y + 12z - 180 = 0$ .

**طريقة أخرى:** يمكن تعيين معادلة للمستوي (ABC) بتحديد شعاع ناظمي للمستوي (ABC) (العمودي على  $\vec{AB}$  و  $\vec{AC}$ )، واعتبار نقطة منه مثل B.

4. لتعيين تقاطع المستويات (OJK) و (OEH) و (ABC)

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{36}{5} \\ z = \frac{48}{5} \end{cases} \text{ فنجد } \begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases} \text{ نحل الجملة}$$

إذن المستويات (OJK) و (OEH) و (ABC) تشترك في النقطة ذات الإحداثيات  $(0; \frac{36}{5}; \frac{48}{5})$ .

5. [OH] هو ارتفاع المثلث BOC القائم في O.

$$\text{إذن } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \text{ وبالتالي } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2} \text{ أي } OH^2 = 144$$

$$\text{ينتج أن } OH = 12 \text{ لأن } OH = OB \cos x \text{ ؛ } OH = OC \sin x \text{ و } \widehat{OCH} = \widehat{BOH} = \alpha$$

حساب EH : المثلث EOH قائم في O. إذن  $EH^2 = OE^2 + OH^2 = 225$  وبالتالي  $EH = 15$ .

ونلاحظ أن  $0^2 + \left(\frac{36}{5}\right)^2 + \left(\frac{48}{5}\right)^2 = 144$  و يساوي  $OH^2$ . إذن نقطة تقاطع المستويات (OJK) و (OEH) و (ABC) هي النقطة H.

6. حساب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC)

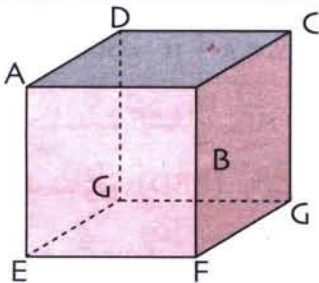
نستعمل الدستور الذي يعطي المسافة بين نقطة من الفضاء ومستو معرف بمعادلة ديكارتية له.

فيكون من أجل المبدأ O والمستوي (ABC)

$$OO' = \frac{|20(0) + 9(0) + 12(0) - 180|}{\sqrt{20^2 + 9^2 + 12^2}} = \frac{180}{\sqrt{625}} = \frac{36}{5}$$

لنقطة O على المستوي (ABC).

## مسألة 2



نعتبر المكعب ABCDEFGH حيث  $AB = 1$  (الشكل)

1. احسب  $\vec{AG} \cdot \vec{BE}$  و  $\vec{AG} \cdot \vec{BD}$ .

استنتج أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (BED).

2. نعتبر المعلم  $(D; \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DH})$ .

عين إحداثيات النقط A, B, D, G, E.

اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستوي (BED). اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (BED).

اثبت أن (AG) عمودي على المستوي (BED).

حل

1. لدينا  $\vec{AG} = \vec{AF} + \vec{FG}$  و بالتالي  $\vec{AG} \cdot \vec{BE} = (\vec{AF} + \vec{FG}) \cdot \vec{BE}$

$$= \vec{AF} \cdot \vec{BE} + \vec{FG} \cdot \vec{BE} = 0 + 0$$

إذن  $\vec{AG} \cdot \vec{BE} = 0$

((FG)) عمودي على المستوي (FBE) فهو عمودي على ((BE)). إذن (AG) و (BE) متعامدان.

لدينا أيضا  $\vec{AG} = \vec{AC} + \vec{CG}$  و بالتالي  $\vec{AG} \cdot \vec{BD} = (\vec{AC} + \vec{CG}) \cdot \vec{BD}$

$$= \vec{AC} \cdot \vec{BD} + \vec{CG} \cdot \vec{BD} = 0 + 0$$

إذن  $\vec{AG} \cdot \vec{BD} = 0$

((CG)) عمودي على المستوي (CBD) فهو عمودي على ((BD)). إذن (AG) و (BD) متعامدان.

. المستقيم (AG) عمودي على مستقيمين متقاطعين (BD) و (BE) من المستوي (BED).

إذن (AG) عمودي على المستوي (BED).

2. المعلم  $(D; \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DH})$  متعامد و متجانس. إحداثيات النقط A, B, D, G و E

هي على الترتيب  $(1; 0; 0)$ ,  $(1; 1; 0)$ ,  $(0; 0; 0)$ ,  $(0; 1; 1)$  و  $(1; 0; 1)$ .

. كتابة تمثيل وسيطي للمستوي (BED).

المستوي (BED) يشمل المبدأ D ويقبل  $\vec{DB}$  و  $\vec{DE}$  شعاعين توجيهيين له و بالتالي يوجد عدنان

حقيقيان  $\lambda$  و  $\mu$  حيث من أجل كل نقطة M من (BED) يكون  $\vec{DM} = \lambda \vec{DB} + \mu \vec{DE}$ .

لدينا  $\vec{DM}(x; y; z)$ ,  $\vec{DB}(1; 1; 0)$  و  $\vec{DE}(1; 0; 1)$ , إذن  $\begin{cases} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$  تمثيل وسيطي للمستوي (BED).

. كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (BED): بتعويض  $\lambda$  و  $\mu$  على الترتيب بالعددين  $y$  و  $z$

في المعادلة  $x = \lambda + \mu$  نجد معادلة ديكارتية للمستوي (BED) وهي  $x - y - z = 0$ .

إحداثيات الشعاع  $\vec{AG}$  هي  $(-1; 1; 1)$  و لدينا  $(1; -1; -1)$  هي إحداثيات شعاع ناظمي  $\vec{n}$

للمستوي (BED). الشعاعان  $\vec{AG}$  و  $\vec{n}$  متوازيان (لأن  $\vec{AG} = -\vec{n}$ )

إذن  $\vec{AG}$  عمودي على المستوي (BED).

**ملاحظة:** الشعاع  $\vec{DA}(-1; 1; 1)$  ناظمي للمستوي (BED) الذي يشمل المبدأ D.

إذن  $0 = 0 + 1 \times y + 1 \times z + (-1)x$  أي  $x - y - z = 0$  هي معادلة للمستوي (BED).



## تمارين و مسائل

### الجداء السلمي في المستوي

**1** ABCD مربع مركزه O حيث  $AB = a$

احسب  $\vec{OC} \cdot \vec{AB}$  بدلالة  $a$ .

**2** ABCD مربع حيث  $AB = a$  I منتصف

[AB] و J منتصف [AD].

أثبت أن المستقيمين (DI) و (CJ) متعامدان :

• باختيار معلم متعامد و متجانس.

• بدون استعمال معلم.

### الجداء السلمي في الفضاء

**3** ABCDEFGH مكعب حيث  $AB = a$

احسب الجداءات السلمية التالية :

$$\vec{AC} \cdot \vec{BF} ; \vec{BC} \cdot \vec{GH} ; \vec{AE} \cdot \vec{EH} ; \vec{DB} \cdot \vec{DC}$$

$$\vec{AF} \cdot \vec{AH} ; \vec{FC} \cdot \vec{FD} ; \vec{AC} \cdot \vec{EG}$$

**4** باختيار معلم متعامد و متجانس

احسب الجداءات السلمية الواردة في التمرين ③

**5** الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}). \text{ تعطى النقطة: } A(\sqrt{2}; -1; 1),$$

$$B(0; 0; 2) \text{ و } C(\sqrt{2}; 1; 1).$$

1. احسب  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  ثم قيس الزاوية  $\widehat{BAC}$ .

2. ماهي طبيعة المثلث ABC ؟

**6** الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}). \text{ تعطى النقطة } A(-2; 1; 4),$$

$$B(-1; -2; 2), C(4; -3; -1) \text{ و } H(0; -5; 0).$$

أثبت أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة C

على المستقيم (AB).

**7** ABCD مشور منتظم حيث  $AB = a$ .

I و J منتصفات [BC]، [BD] و [AC]

على الترتيب

$$\vec{AD} \cdot \vec{JK}; \vec{AB} \cdot \vec{IK}; \vec{AD} \cdot \vec{AK}; \vec{AB} \cdot \vec{AC}$$

### المستقيم في الفضاء

فيما يلي الفضاء منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**8** 1. عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل

$$\text{النقطة } A(1; 0; -1) \text{ و يقبل } \vec{u}(1; 1; 1) \text{ شعاع}$$

توجيه له.

2. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل

$$\text{النقطة } B(2; 1; -1) \text{ و يقبل } \vec{v}(1; 1; 0) \text{ شعاع}$$

توجيه له.

3. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يشمل

$$\text{النقطة } C(-2; 1; 0) \text{ و يقبل } \vec{k} \text{ شعاع توجيه له.}$$

**9** 1. عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) حيث

$$A(2; 1; 3) \text{ و } B(-1; 3; 2) \text{ نقطتان من الفضاء.}$$

2. هل يشمل (AB) النقطة  $C(8; -3; 5)$  ؟

النقطة  $D(4; -2; 1)$  ؟

**10** نعتبر المستقيم  $(\Delta)$  المعرف بالتمثيل الوسيط

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} - 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases} \text{ حيث } t \text{ عدد حقيقي.}$$

1. عين من بين النقط

$$A(2; 1; 0), B\left(\frac{1}{2}; -1; -1\right), C\left(-\frac{3}{2}; 2; 0\right)$$

$$\text{و } D\left(-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right) \text{ التي تنتمي إلى } (\Delta).$$

2. عين شعاع توجيه للمستقيم  $(\Delta)$ .

3. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(\Delta')$  الذي يشمل

النقطة O و يوازي  $(\Delta)$ .

4. اكتب جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم  $(\Delta')$ .



## تمارين و مسائل

**17** تعطى النقط  $A(2; -1; 3)$  ،  $B(-1; 1; 2)$  و  $C(0; -1; 4)$ .

1. اثبت أن النقط  $A$  ،  $B$  ،  $C$  تعرف مستويا.

2. عيّن معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$ .

فيما يلي الفضاء منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

**18** اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي  $(P)$  الذي

يشمل النقطة  $A(1; -1; 2)$  و يقبل  $\vec{u}(1; 1; 1)$

و  $\vec{v}(-1; 1; 1)$  شعاعي توجيه له.

**19** نفس السؤال السابق من أجل المستوي الذي

يشمل النقط  $A(-1; 2; 1)$  ،  $B(3; 4; -3)$

و  $C(5; 3; 2)$ .

**20** المستوي المعروف بالتمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x = -2 + 3t - 2s \\ y = -t + 3s \\ z = -3 - 2t + s \end{cases} \text{ حيث } t \text{ و } s \text{ عدنان حقيقيان.}$$

من بين النقط  $A(-2; -1; 1)$  ،  $B(3; -4; -6)$  ،

$C(-2; 0; -3)$  ،  $D(1; -1; 1)$  عيّن التي تنتمي

إلى المستوي  $(P)$ .

**21** الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(P)$  المستوي المعروف بالتمثيل الوسيطي

$$\begin{cases} x = -3 + 4t - 2s \\ y = 4 - 5t - s \\ z = 1 + t + 3s \end{cases} \text{ حيث } t \text{ و } s \text{ عدنان حقيقيان.}$$

1. عيّن نقطة  $A$  من المستوي  $(P)$  و شعاعي توجيه له.

2. احسب إحداثيات شعاع ناظمي له.

3. اكتب معادلة ديكارتية له.

**11** الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

هل تعرف الجمل التالية نفس المستقيم ؟

$$t : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = t \end{cases} \text{ عدد حقيقي.}$$

$$\begin{cases} 2x - y - 2z - 1 = 0 \\ x - 4y - z + 3 = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x - 1 = z \\ y = 1 \end{cases}$$

برر إجابتك.

**المستوي في الفضاء**

فيما يلي، الفضاء منسوب إلى معلم متعامد

و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**12** عيّن شعاعا ناظميا لكل من المستويات التالية :

$$(P_1) : 2x + \frac{1}{3}y - z = 0$$

$$(P_2) : -5x - 2y + 3z - 1 = 0$$

$$(P_4) : \frac{1}{2}y - z + 1 = 0 ; (P_3) : 3x - 2y = 0$$

$$(P_6) : 3z - 4 = 0 ; (P_5) : x - \sqrt{2} = 0$$

**13** النقطة  $A(4; -1; 3)$  من الفضاء

و  $\vec{u}(2; 1; -3)$  شعاع.

عيّن معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل  $A$

و يقبل  $\vec{u}$  شعاعا ناظميا له.

**14** النقطة  $A(3; 1; -1)$  و  $x - 2y + z - 5 = 0$

معادلة لمستوي  $(P)$ . عيّن معادلة ديكارتية للمستوي

$(Q)$  الذي يشمل  $A$  و يوازي  $(P)$ .

**15**  $A(2; \frac{1}{2}; 3)$  ،  $B(-3; 4; -\frac{1}{2})$  نقطتان.

عيّن معادلة للمستوي المحوري للقطعة  $[AB]$  (الذي

يشمل منتصف  $[AB]$  و يقبل  $\vec{AB}$  شعاعا ناظميا له).

**16** نعتبر المستوي  $(P)$  المعروف بالمعادلة

$$5x - y + z + 6 = 0 \text{ و النقطة } A(-5; 6; -2)$$

أثبت أن النقطة  $B(0; 5; -1)$  هي المسقط

العمودي للنقطة  $A$  على  $(P)$ .

$$(D): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -4 - 3t \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ و } (P): 2x - y + z + 5 = 0 \quad (1)$$

$$(D): \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -1 - t \\ z = 2 \end{cases} \text{ و } (P): x + 3y - z + 3 = 0 \quad (2)$$

$$(D): \begin{cases} x = 4 + t \\ y = t \\ z = 3 + t \end{cases} \text{ و } (P): x + y - 2z + 2 = 0 \quad (3)$$

**25** ادرس الوضع النسبي لكل من المستوي (P) والمستقيم (D)، وعين نقط التقاطع، إن وجدت في كل من الحالتين التالين :

$$(P): 2x - y + 3z = 0 \quad (1)$$

$$(D): x + 1 = y - 2 = \frac{z - 4}{2} \text{ و}$$

$$(D): \begin{cases} \frac{x - 1}{3} = \frac{y + 2}{-1} \\ z = 2 \end{cases} \text{ و } (P): x + y - 2z - 1 = 0 \quad (2)$$

**الوضع النسبي لمستويين (أو ثلاث مستويات)**

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**26** ادرس فيما يلي الوضع النسبي لكل من المستويين (P)، (P') وعين مستقيم تقاطعهما عند

$$(P') - 2x + 4y - 2z + 2 = 0 \text{ و } (P) x - 2y + z - 1 = 0 \quad (1)$$

$$(P') 2x + 3y - z + 10 = 0 \text{ و } (P) 4x + 6y - 2z - 1 = 0 \quad (2)$$

$$(P') x - y + 2z + 2 = 0 \text{ و } (P) 3x - 2y - z - 9 = 0 \quad (3)$$

$$(P') 2x + y + 1 = 0 \text{ و } (P) -x + 2y + z + 8 = 0 \quad (4)$$

**27** ادرس فيما يلي تقاطع المستويات (P)، (Q) و (R) حيث :

$$(Q) 2y - z + 3 = 0 \text{ و } (P) x + y + z - 2 = 0 \quad (1)$$

$$(R) x + y + z - 1 = 0$$

$$(Q) x - y + z + 4 = 0 \text{ و } (P) x + y + z - 2 = 0 \quad (2)$$

$$(R) x + \frac{4}{3}y + z - 3 = 0$$

**الوضع النسبي لمستقيمين في الفضاء**

**22** الفضاء منسوب إلى معلم  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$t$  و  $t'$  عدنان حقيقيان :

ادرس فيما يلي الوضع النسبي لكل من المستقيمين (D) و (D').

$$(D'): \begin{cases} x = -6 + 5t' \\ y = -2 - t' \\ z = 4 - 4t' \end{cases} \text{ و } (D): \begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = -4 - t \\ z = -4 - 4t \end{cases} \quad (1)$$

$$(D'): \begin{cases} x = t' \\ y = 3 + t' \\ z = 8 + 3t' \end{cases} \text{ و } (D): \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 4 + 3t \end{cases} \quad (2)$$

$$(D'): \begin{cases} x = 2 + t' \\ y = -1 - t' \\ z = 7 + 4t' \end{cases} \text{ و } (D): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (3)$$

$$(D'): \begin{cases} x = -2 + t' \\ y = 4 + 2t' \\ z = 2 + 3t' \end{cases} \text{ و } (D): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 7 + 3t \end{cases} \quad (4)$$

**23** الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس

1. اثبت أن المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين التالين :

$$\begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 1 + 3t' \\ z = 6 - t' \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -2 - t \\ z = 7 + 4t \end{cases}$$

حيث  $t' \in \mathbb{R}$ ،  $t \in \mathbb{R}$ ، متقاطعان.

2. عين معادلة ديكارتية للمستوي الذي يشمل المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$ .

**الوضع النسبي لمستقيم ومستوي**

فيما يلي الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

**24**  $t$  عدد حقيقي. ادرس الوضع النسبي لكل من

المستوي (P) والمستقيم (D)، وعين نقط التقاطع، إن وجدت، في كل حالة من الحالات التالية :



## تمارين و مسائل

(3)  $(P) x+y+z-1=0$  و  $(Q) \frac{x}{3}+y-z=0$

(R)  $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}-\frac{z}{6}-\frac{1}{6}=0$

28 حل الجمل التالية ثم فسر بيانها النتيجة.

(1) 
$$\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+y-z=1 \\ 3x+2y-4z=-5 \end{cases}$$

(2) 
$$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x+2y-4z=-5 \\ x+y-3z=1 \end{cases}$$

(3) 
$$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x+2y-4z=-5 \\ 4x+y+3z=15 \end{cases}$$

### مجموعات نقط من الفضاء

29 A, B و C نقط من الفضاء مع  $BC=4$ .

1. عين مجموعة النقط M من الفضاء

بحيث  $\vec{BC} \cdot \vec{AM} = 12$

2. نفس السؤال من أجل  $\vec{BC} \cdot \vec{AM} = -10$

30 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نفرض النقطة  $A(1; -2; 3)$  و الشعاع  $\vec{n}(2; -1; 4)$

عين مجموعة النقط M من الفضاء بحيث يكون

$\vec{AM} \cdot \vec{n} = -4$

31 A و B نقطتان من الفضاء بحيث  $AB=10$ .

1. عين النقطة G مرجح النقطتين A و B المرفقتين

بالمعاملين 2 و 3 على الترتيب. أنشئ G.

2. عين مجموعة النقط M من الفضاء بحيث

$2MA^2 + 3MB^2 = 200$

هل تنتمي النقطة A إلى هذه المجموعة ؟

هل تنتمي النقطة B إليها ؟

32 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . A(1; 2; 3) و B(3; 4; 2) نقطتان.

عين مجموعة النقط M من الفضاء بحيث :

$2MA^2 - 3MB^2 = -10$

33 A و B نقطتان من الفضاء بحيث  $AB=5$ .

عين مجموعة النقط M من الفضاء بحيث :

$MA^2 - MB^2 = 30$

34 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . A(2; -1; 3) و B(2; 3; 1) نقطتان.

عين مجموعة النقط M من الفضاء بحيث :

$MA^2 - MB^2 = -10$

### مسائل

35 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . تعطي النقط A(1; 2; 0)

B(-2; 1; 1), C(-3; 5; -1) و D(-4; 2; 4)

1. اثبت أن النقط B, C و D تعين مستويا (P).

عين معادلة ديكارتية له.

2. عين إحداثيات المسقط العمودي H للنقطة A

على (P).

3. عين معادلة للمستوي (R) الذي يشمل H

و يقبل  $\vec{BC}$  شعاعا ناظميا له.

تحقق أن (P) و (R) متعامدان.

4. (P) و (R) يتقاطعان وفق مستقيم ( $\Delta$ ).

إعط تمثيلا وسيطيا له.

5. احسب المسافة بين المبدأ O و المستقيم ( $\Delta$ ).

36 الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . لتكن النقطتان A(-2; -1/2; -2)

و B(3; 3; -3).



## تمارين و مسائل

- أ) تحقق من وجود النقطة  $G$  من أجل كل عدد حقيقي موجب  $t$ .
- ب) ليكن  $I$  مرجح النقطتين  $A$  و  $B$  المرفقتين بالمعاملين  $1$  و  $2$  على الترتيب.
- عيّن إحداثيات النقطة  $I$ .
- عبّر عن  $\overrightarrow{IG}$  بدلالة  $\overrightarrow{IC}$  و  $t$ .
- ج) بيّن أن مجموعة النقط  $G$  عندما يمسح  $t$  المجموعة  $\mathbb{R}_+$ ، هي القطعة  $[IC]$  باستثناء  $C$ .
- ما هي قيمة  $t$  التي من أجلها، يكون منتصف القطعة  $[IC]$  منطبقا على  $G$ ؟

1. اكتب معادلة للكرة  $(S)$  ذات المركز  $A$  و التي تشمل  $B$ .
2. عيّن معادلة ديكارتية للمستوي  $(P)$  المماس للكرة  $(S)$ . في النقطة  $B$ .
3. لتكن النقط  $D(-2; -2; -5)$ ؛  $C(-3; 0; -3)$ ؛  $E(-1; 0; -5)$ .
- تحقق أن النقط  $C$ ،  $D$  و  $E$  تعيّن مستويا  $(Q)$  يطلب إيجاد تمثيل وسيطي له.
4. بيّن أن المستويين  $(P)$  و  $(Q)$  متعامدان.
5. حدّد الوضع النسبي للمستوي  $(Q)$  و الكرة  $(S)$ .
- عيّن طبيعة مجموعة تقاطعهما.

**37** الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

- نعتبر النقط  $A(0; -1; 1)$ ؛  $B(0; 0; 3)$ ؛  $C(-2; 0; 0)$ .
1. اثبت أن النقط  $A$ ،  $B$ ،  $C$  ليست على استقامة واحدة.
2. ليكن الشعاع  $\vec{n}(-3; -4; 2)$ .
- تحقق أن  $\vec{n}$  عمودي على كل من الشعاعين  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{AC}$ .
- استنتج معادلة ديكارتية للمستوي  $(ABC)$ .
3.  $(P)$  و  $(Q)$  مستويان معادلتاهما على الترتيب :
- $$2x + y + 2z + 1 = 0 \quad \text{و} \quad x - 2y + 6z = 0$$
- اثبت أن  $(P)$  و  $(Q)$  يتقاطعان وفق مستقيم  $(D)$ .
- يطلب تعيّن تمثيل وسيطي له.
4. ادرس الوضع النسبي للمستقيم  $(D)$  و المستوي  $(ABC)$ .
5. ليكن  $t$  عددا حقيقيا موجبا.
- نعتبر المرجح  $G$  للنقط  $A$ ،  $B$  و  $C$  المرفقة بالمعاملات  $2$ ؛  $1$ ؛  $t$  على الترتيب.

## حلول التمارين والمسائل

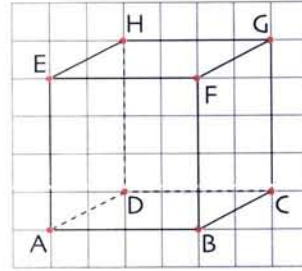
### الهندسة في الفضاء

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 = \frac{a^2}{2} \quad 1$$

2. لدينا  $(A; \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})$  معلم متعامد ومتجانس  
 $D(0; a), C(a; a), J(0; \frac{a}{2}), I(\frac{a}{2}; 0)$   
 $\overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{CJ} = 0$  إذن  $(DI)$  و  $(CJ)$  متعامدان.  
 بدون اختيار معلم

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DI} \cdot \overrightarrow{CJ} &= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI})(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ}) \\ &= \frac{1}{2} \overrightarrow{DA}^2 - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 = 0 \end{aligned}$$

إذن  $(DI), (CJ)$  متعامدان.



3. لدينا  $AB = a$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} &= DC^2 = a^2 \\ \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EH} &= 0 \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{GH} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \\ \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EG} &= \overrightarrow{AC}^2 = 2a^2 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{FD} = (\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GC}) \cdot (\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GD}) = 2a^2$$

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AH} = (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF}) \cdot (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH}) = a^2$$

4. ينسب الفضاء إلى المعلم المتعامد والمتجانس  
 $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  (كما في الشكل السابق)

لدينا  $C(a; a; 0), B(a; 0; 0), A(0; 0; 0)$   
 $F(a; 0; a), E(0; 0; a), D(0; a; 0)$   
 $H(0; a; a), G(a; a; a)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{GH} &= 0 ; \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EH} = 0 ; \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = a^2 \\ \overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{FD} &= 2a^2 ; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EG} = 2a^2 ; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \\ \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AH} &= a^2 \end{aligned}$$

5. 1.  $\overrightarrow{AC}(0; 2; 0), \overrightarrow{AB}(-\sqrt{2}; 1; 1)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos(\widehat{BAC})$$

و  $AC = 2, AB = 2$

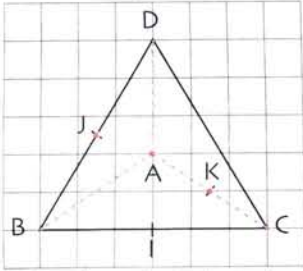
إذن  $2 = 4 \cos(\widehat{BAC})$  وبالتالي  $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ .

2. المثلث متساوي الأضلاع.

6. لدينا  $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{AB}$  إذن  $H \in (AB)$

هو شعاع توجيه للمستقيم  $(AB)$  و  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$  إذن  $H$  هي المسقط العمودي للنقطة  $C$  على  $(AB)$ .

7.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$



$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AK} = AK^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IK} = \frac{AB^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AK} = -a^2$$

8. 1.  $(\lambda \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$

2.  $(\eta \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = \eta \end{cases}$  3.  $(\mu \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 2 + \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = -1 \end{cases}$

9. 1.  $(\lambda \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$

2. من أجل  $(x; y; z) = (8; -3; 5)$

يكون  $\lambda = -2$  إذن  $C(8; -3; 5)$  تنتمي إلى  $(AB)$ .

10. 1.  $D \in (\Delta), C \in (\Delta), B \in (\Delta), A \notin (\Delta)$

2. الشعاع  $\vec{u}(-2; 3; 1)$  هو شعاع توجيه للمستقيم  $(\Delta)$

3. الجملة  $\begin{cases} x = -2\eta \\ y = 3\eta \\ z = \eta \end{cases}$  تمثيل وسيطي للمستقيم  $(\Delta')$

4. المعادلتان  $\frac{x}{-2} = \frac{y}{3} = z$  هما جملة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم  $(\Delta')$ .

## حلول التمارين و المسائل

$$18 \quad \begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = -1 + \lambda + \mu \\ z = 2 + \lambda + \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu \text{ عدنان حقيقيان})$$

هي تمثيل وسيطي للمستوي (P)

$$19 \quad \begin{cases} x = -1 + 4\lambda + 6\mu \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 - 4\lambda + \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu \text{ عدنان حقيقيان})$$

هي تمثيل وسيطي للمستوي (P)

$$20 \quad D \in (P), C \in (P), B \in (P), A \notin (P)$$

$$21 \quad 1. \vec{v}(-1; -1; 3), \vec{u}(4; -5; 1), A(-3; 4; 1)$$

2. شعاع ناظمي للمستوي (P) يعني  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$

$$\vec{n}(1; 1; 1) \text{ ونجد } \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

$$3. x + y + z - 2 = 0 \text{ معادلة ديكرتية للمستوي (P)}$$

$$22 \quad 1. (D), (D') \text{ لهما شعاعا توجيه متساويان}$$

و يشتركان في نقطة (مثل  $A(-6; -2; 4)$ )

إذن (D), (D') متطابقان

$$2. (D), (D') \text{ لهما شعاعا توجيه متساويان}$$

ولا يشتركان في أية نقطة إذن D, D' متوازيان

$$3. (D), (D') \text{ لهما شعاعا توجيه غير متوازيين إذن}$$

(D), (D') إما متقاطعان أو غير مستويين (ليسا من

نفس المستوي).

$$\text{بحل الجملة } \begin{cases} -1 + 2t = 2 + t' \\ 1 - t = -1 - t' \end{cases} \text{ نجد } \begin{cases} t = 1 \\ t' = -1 \end{cases}$$

من أجل  $t = 1$  نجد النقطة من (D)

$$\text{ذات الاحداثيات } (1; 0; 3)$$

من أجل  $t' = -1$  نجد النقطة من (D') ذات الاحداثيات

$$(1; 0; 3) \text{ إذن يشتركان في النقطة } A(1; 0; 3)$$

4. شعاعا توجيه (D), (D') غير متوازيين

إذن (D), (D') متقاطعان أو غير مستويين

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} -1 + t = -2 + t' \\ 2 + t = 4 + 2t' \end{cases} \text{ نجد } \begin{cases} t = -4 \\ t' = -3 \end{cases}$$

من أجل  $t = -4$  نجد النقطة من (D)

$$11 \quad \text{الجملة الثلاث متكافئة (لها نفس الحلول) إذن}$$

فهي تعرف نفس المستقيم (الذي يشمل  $A(1; 1; 0)$

و  $\vec{u}(1; 0; 1)$  شعاع توجيه له).

$$12 \quad \vec{n}_3(3; -2; 0), \vec{n}_2(-5; -2; 3), \vec{n}_1(2; \frac{1}{3}; 0)$$

$$\vec{n}_6(0; 0; 3), \vec{n}_5(1; 0; 0), \vec{n}_4(0; \frac{1}{2}; -1)$$

اشعة ناظمية للمستويات  $(P_1), (P_2), (P_3), (P_4)$ ,

$(P_5), (P_6)$  بهذا الترتيب

$$13 \quad \vec{u}(2; 1; -3) \text{ شعاع ناظمي للمستوي (P) حيث}$$

$$A(4; -1; 3) \text{ و يشمل } (P): 2x + y - 3z + d = 0$$

$$\text{إذن } (P): 2x + y - 3z + 2 = 0$$

$$14 \quad (Q) // (P) \text{ يعني أن } \vec{n}(1; -2; 1) \text{ شعاع ناظمي}$$

للمستوي (Q) الذي يشمل A إذن  $x - 2y + z = 0$

$$15 \quad \text{المستوي المحوري (P) للقطعة [AB] يشمل}$$

منتصفها  $(-\frac{1}{2}; \frac{9}{4}; \frac{5}{4})$  و يقبل شعاعا ناظمية له

$$(P): -5x + \frac{7}{2}y - \frac{7}{2}z - 6 = 0 \text{ إذن } \vec{AB}(-5; -\frac{7}{2}; \frac{7}{2})$$

$$16 \quad AB = 3\sqrt{3}, B \in (P) \text{ و المسافة بين A و (P)}$$

هي  $\frac{27}{3\sqrt{3}}$  أي  $3\sqrt{3}$  إذن B هي المسقط العمودي

لنقطة A على (P)

$$17 \quad 1. \text{النقط } A, B, C \text{ ليست على استقامة}$$

واحدة إذن تعرف مستويا.

$$2. ax + by + cz + d = 0 \text{ معادلة ديكرتية لمستوي (P)}$$

$$\begin{cases} 2a - b + 3c + d = 0 \\ -a + b + 2c + d = 0 \\ -b + 4b + d = 0 \end{cases} \text{ يعني (P) نقط } A, B, C$$

بحل الجملة ذات المجاهيل a, b, c و اختيار d

$$(مثلا d = -11) \text{ نجد } 2x + 5y + 4z - 11 = 0$$

و هي معادلة للمستوي (ABC)



## حلول التمارين و المسائل

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0, \vec{u}(3; -1; 0), \vec{n}(1; 3; -1) \cdot 2$$

النقطة من  $A(-2; -1; 2)$  من  $(D)$  لا تنتمي إلى  $(P)$  إذن  $(P)$ ،  $(D)$  متوازيان.

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0, \vec{u}(1; 1; 1), \vec{n}(1; 1; -2) \cdot 3$$

النقطة من  $A(4; 0; 3)$  من  $(D)$  تنتمي إلى  $(P)$  إذن  $(D) \subset (P)$ .

**25** 1.  $(D)$ ،  $(P)$  متقاطعان في النقطة ذات

$$\text{لاحداثيات } \left(-\frac{15}{7}; \frac{6}{7}; \frac{12}{7}\right)$$

2.  $(D)$ ،  $(P)$  متقاطعان في النقطة ذات الاحداثيات  $(10; -5; 2)$

**26** 1.  $(P)$ ،  $(P')$  منطبقان عن بعضهما

(متوازيان و يشتركان في نقطة).

2.  $(P)$ ،  $(P')$  متوازيان (تماما).

3.  $(P)$ ،  $(P')$  متقاطعان في مستقيم.

تعيين مستقيم التقاطع يكون بحل الجملة

$$\begin{cases} 3x - 2y - z - 9 = 0 \\ x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases} \text{ و اعتبار أحد المجاهيل}$$

(مثلا  $z = t$ ) وسيطا. و نجد تمثيلا وسيطا للمستقيم

$$(t \in \mathbb{R}), \begin{cases} x = 5t + 13 \\ y = 7t + 15 \\ z = t \end{cases} \text{ المشترك بين } (P), (P')$$

4.  $(P)$ ،  $(P')$  متقاطعان في مستقيم معرف بتمثيل

$$(t \in \mathbb{R}), \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \\ z = 5t - 6 \end{cases} \text{ وسيطي له}$$

**27** 1.  $(P)$ ،  $(R)$  متوازيان إذن

$$(P) \cap (Q) \cap (R) = (\emptyset)$$

2.  $(P)$ ،  $(Q)$  يشتركان في المستقيم  $(\Delta)$  المعروف

$$(t \in \mathbb{R}), \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \text{ بتمثيل وسيطي}$$

ذات الاحداثيات  $(-5; -2; -5)$ .

من أجل  $t' = -3$  نجد النقطة من  $(D')$  ذات الاحداثيات  $(-5; -2; -7)$ .

إذن  $(D)$ ،  $(D')$  لا يشتركان في أية نقطة و منه  $(D)$ ،  $(D')$  غير مستويين ( لا يشملها مستو ).

**23** 1. شعاعا توجيه  $(\Delta)$ ،  $(\Delta')$  غير متوازيين

فهما متقاطعان أو غير مستويين.

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} 3 + 5t = 2 + t' \\ 7 + 4t = 6 - t' \end{cases} \text{ نجد } \begin{cases} t = 0 \\ t' = -1 \end{cases}$$

$t = 0$  نجد  $A(3; -2; 7)$  من  $(\Delta)$

$t' = -1$  نجد نفس النقطة  $A$  من  $(\Delta')$

إذن  $(\Delta)$ ،  $(\Delta')$  يشتركان في النقطة  $A$

2. الشعاع الناظمي  $\vec{n}(\alpha; \beta; 8)$  للمستوي  $(P)$

الذي يشمل  $(\Delta)$ ،  $(\Delta')$  عمودي على الشعاعين

$$\vec{v}(-1; 3; -1), \vec{u}(5; -1; 4)$$

$$\text{إذن } \begin{cases} 5\alpha - \beta + 4\delta = 0 \\ -\alpha + 3\beta - \delta = 0 \end{cases} \text{ حيث } \delta \text{ وسيط حقيقي.}$$

$$\text{نجد } (\alpha; \beta; 8) = \left(-\frac{11}{14}; \frac{8}{14}; 8\right) \text{ حيث } 8 \neq 0$$

و من أجل  $\delta = 14$  :  $(\alpha; \beta; 8) = (-11; 1; 14)$

النقطة ذات الاحداثيات  $(2; 1; 6)$  تنتمي إلى  $(P)$

$$\text{إذن } 11x - y - 14z + 63 = 0 \text{ معادلة ديكارتية}$$

للمستوي  $(P)$ .

**24** 1. شعاع ناظمي للمستوي  $(P)$

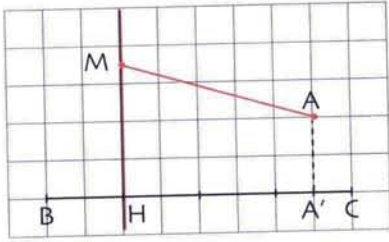
$$\vec{u}(1; -3; 1) \text{ شعاع توجيه للمستقيم } (D)$$

$\vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0$  إذن  $(P)$ ،  $(D)$  متقاطعان في نقطة

$$\text{احداثياتها } \left(-\frac{4}{3}; 3; \frac{2}{3}\right) \text{ (من أجل } t = -\frac{7}{3} \text{)}$$

## حلول التمارين و المسائل

في اتجاهين متعاكسين.  $\overrightarrow{A'H} = -\frac{5}{2}$ .



مجموعة النقط  $M$  حيث  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = -10$  هو المستوي الذي يشمل  $H$  و يقبل  $\overrightarrow{BC}$  شعاعا ناظميا.

**30**  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = -4$  يعني  $2x - y + 4z - 16 = 0$

مجموعة النقط  $M$  هي مستوي معرف بالمعادلة السابقة.

**31** • مجموعة النقط  $M$  من الفضاء حيث

$2MA^2 + 3MB^2 = 200$  هي كرة  $S$  مركزها النقطة

$G$  مرجع النقطتين  $A(2)$ ،  $B(3)$  و نصف قطرها 4



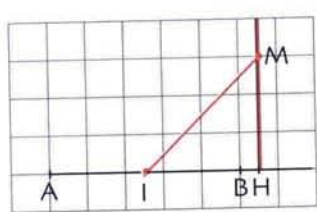
**32** مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الفضاء

حيث  $2MA^2 - 3MB^2 = -10$  هي الكرة ذات المعادلة

$\omega(7; 8; 0)$ ، مركزها  $(x-7)^2 + (y-8)^2 + z^2 = 64$

و نصف قطرها 8.

**33** مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الفضاء



حيث  $MA^2 - MB^2 = 30$

هي المستوي العمودي

على النقطة  $(AB)$  في النقطة

$H$ ، المسقط العمودي

للقطة  $M$  على  $(AB)$ ، حيث  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IH} = 15$  أو  $\overrightarrow{IH} = 3$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IH})$  لهما نفس الإتجاه  $I$  منتصف  $[AB]$

**34** مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  حيث

$MA^2 - MB^2 = -10$  هو المستوي المعروف بالمعادلة

الديكارتية  $4y - 2z + 5 = 0$

شعاع توجيهه  $\vec{u}(-1; 0; 1)$  عمودي على الشعاع

الناظمي  $\vec{n}(1; \frac{4}{3}; 1)$  للمستوي  $(R)$

إذن  $(P) \cap (Q) \cap (R) = (\emptyset)$ .

**3** •  $(P)$ ،  $(Q)$  يشتركان في المستقيم  $(\Delta)$  المعروف

بتمثيل وسيطي  $(t \in \mathbb{R})$ ،  $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{2}{3}t + \frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{3}t + \frac{1}{2} \end{cases}$

شعاع توجيهه  $\vec{u}(1; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3})$  غير عمودي على  $(R)$

$(\Delta)$  و  $(R)$  يتقاطعان في النقطة  $A(0; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$

إذن  $(P) \cap (Q) \cap (R) = \{A\}$ .

**28**  $(x; y; z) = (1; 2; 3)$  • 1

المستويات الثلاث تتقاطع في النقطة  $A(1; 2; 3)$

**2** • الجملة ليس لها حل. المستويات الثلاثة لا تشترك

في أية نقطة.

**3** • الجملة لها ما لا نهاية من الحلول المستويات

الثلاثة تشترك في مستقيم معرف بتمثيل

وسيطي  $(t \in \mathbb{R})$ ،  $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{5}{2}t + \frac{9}{2} \\ z = -\frac{1}{2}t + \frac{7}{2} \end{cases}$

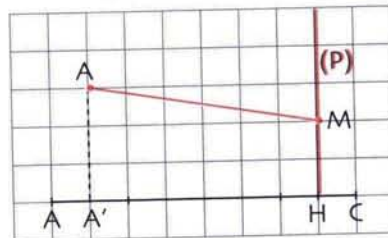
**29** نفرض أن الاتجاه الموجب هو اتجاه  $\overrightarrow{BC}$

**1** • نسمي  $A'$ ،  $H$  المسقطين العموديين على

$(BC)$  لكل من

النقطتين  $A$ ،  $M$

بهذا الترتيب



لدينا  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{A'H} = 12$

$\overrightarrow{BC}$ ،  $\overrightarrow{A'H}$  لهما نفس الاتجاه إذن  $\overrightarrow{A'H} = 3$ ، إذن

مجموعة النقط  $M$  التي تحقق  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = 12$

هي المستوى الذي يشمل  $H$  و يقبل  $\overrightarrow{BC}$  شعاعا ناظميا.

**2** •  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{A'H} = -10$  مع  $\overrightarrow{A'H}$ ،  $\overrightarrow{BC}$



## حلول التمارين و المسائل

35 1. B, C, D ليست على استقامة واحدة،

إذن تعيين مستويا (P) معادلته الديكارتية

$$2x + y + z + 2 = 0 \text{ هي}$$

2. A(1; 2; 0) لا تنتمي إلى (P)

نضع  $H(x_0; y_0; z_0)$  لدينا  $\vec{AH}$  يوازي  $\vec{n}$

( $\vec{n}$  الشعاع الناطمي للمستوي (P)).

$$H \in (P) \text{ حيث } t \text{ وسيط حقيقي مع } \begin{cases} x_0 = 2t + 1 \\ y_0 = t + 2 \\ z_0 = t \end{cases} \text{ إذن}$$

$$\text{إذن } H(-1; 1; -1)$$

3.  $x - 4y + 2z + 7 = 0$  معادلة ديكارتية للمستوي

(R) الذي يشمل H و يقبل  $\vec{BC}$  شعاعا ناظميا.

الشعاعان الناطميان  $\vec{n}(2; 1; 1)$ ،  $\vec{n}'(1; -4; 2)$

متعامدان إذا (P)، (R) متعامدان.

$$4. \text{ نحل الجملة } \begin{cases} 2x + y + z + 2 = 0 \\ x - 4y + 2z + 7 = 0 \end{cases}$$

مع اعتبار احد المجاهيل ( $z$  مثلا) وسيطا فنجد التمثيل

$$t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = -\frac{2}{3}t - \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{3}t + \frac{4}{3} \\ z = t \end{cases} \text{ الوسيط للمستقيم } (\Delta):$$

5. لدينا O', K, L مساقط O على ( $\Delta$ ), (P), (R).

على الترتيب. نجد  $OO' = \sqrt{3}$

36 1. معادلة الكرة  $S(A; AB)$

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 36$$

2.  $\vec{AB}(4; 4; -2)$  شعاع ناظمي للمستوي (P)

و الذي يشمل B.  $2x + 2y - z - 15 = 0$  (P)

3. النقط C, D, E ليست على استقامة واحدة، إذن

$$\begin{cases} x = -3 + \lambda + 2\mu \\ y = -2\lambda \\ z = -3 - 2\lambda - 2\mu \end{cases} \text{ تعين مستويا (Q) حيث الجملة}$$

هي تمثيل وسيطي له.

4.  $\vec{n}(2; -1; 2)$  شعاع ناظمي للمستوي (Q).

$\vec{AB}$ ،  $\vec{n}$  متعامدان إذن (P)، (Q) متعامدان.

$$5. 2x - y + 2z + 12 = 0 \text{ معادلة ديكارتية}$$

للمستوي (Q)،  $AB = 6$ ،  $d(A; Q) = 3$ .

$d(A; Q)$  هي المسافة بين A مركز الكرة S و المستوي

(Q). لدينا  $d(A; Q) < AB$

إذن (Q) يقطع S في دائرة نصف قطرها  $r$

$$\text{حيث } r = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3} \text{ و مركزها } A' \text{ المسقط}$$

العمودي للنقطة A على (Q) حيث  $\vec{n}$

و  $\vec{AA'}(x_0 + 1; y_0 + 1; z_0 + 1)$  متوازيان و  $A' \in (Q)$ .

$$\text{إذن } A'(-3; 0; -3)$$

37 1. الشعاعان  $\vec{AB}(0; 1; 2)$  و  $\vec{AC}(-2; 1; -1)$

غير متوازيين إذن A, B, C ليست على استقامة واحدة.

$$2. \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ و } \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \text{ إذن } \vec{n} \text{ عمودي}$$

$$\text{على } \vec{AB} \text{ و } \vec{AC} : -3x - 4y + 2z - 6 = 0. (ABC)$$

3.  $\vec{n}_1(2; 1; 2)$  شعاع ناظمي ل (P).

$\vec{n}_2(1; -2; 6)$  شعاع ناظمي ل (Q).

$\vec{n}_1$  و  $\vec{n}_2$  غير متوازيين إذن (P) و (Q) متقاطعان.

$$\begin{cases} x = -2 + -\frac{2}{5} \\ y = -2t - \frac{1}{5} \\ z = t \end{cases} \text{ وفق مستقيم، تمثيله الوسيط}$$

$$4. \text{ نجد } t = \frac{1}{4}$$

نقطة تقاطع (D) و (ABC) هي  $E(-\frac{9}{10}; -\frac{7}{10}; \frac{1}{4})$

5. (أ) من أجل كل عدد حقيقي موجب  $t$ ،  $t + 2 + 1 \neq 0$

إذن المرجح G موجود.

$$\text{ب) } \vec{IG} = \frac{t}{3+t} \vec{IC}, \text{ ا } (0; -\frac{1}{3}; \frac{7}{3})$$

ج) من أجل كل عدد موجب  $t$  :  $0 \leq \frac{t}{3+t} < 1$

إذن G تنتمي إلى القطعة [IC] باستثناء النقطة C.

$$\text{لدينا } \frac{t}{3+t} = \frac{1}{2} \text{ إذن } t = 3$$

من أجل  $t = 3$ ، G هي منتصف [IC].



كتاب الرياضيات من سلسلة مدرستي موجه إلى تلاميذ السنة الثالثة من التعليم الثانوي، شعبة العلوم التجريبية. فهو يتماشى مع المنهاج الرسمي المقرر تطبيقه ابتداء من سبتمبر 2007 و يتكفل بالكفاءات القاعدية و الكفاءات الرياضية المصرح بها.

يتضمن كل باب من هذا الكتاب العناصر التالية :

- المعارف الأساسية الواردة في المنهاج.
  - الطرائق التي ينبغي التحكم فيها.
  - تمارين و مسائل مرفقة بحلول مفصلة.
  - تمارين و مسائل مقترحة للحل، توجد حلولها في الصفحات الأخيرة للكتاب.
- يشمل هذا الجزء أكثر من 220 تمرين و مسألة محلولة.

كما نلفت الانتباه إلى وجود أكثر من 460 تمرين و مسألة محلولة في الجزأين من الكتاب، تساعد المترشح لامتحان البكالوريا على التحضير الجيد.



أخي / أختي

إن إستفدت من هذا الملف فالرجاء أن تدع لي



و للمؤلف بالخير و النجاح و المغفرة.

Hard\_equation